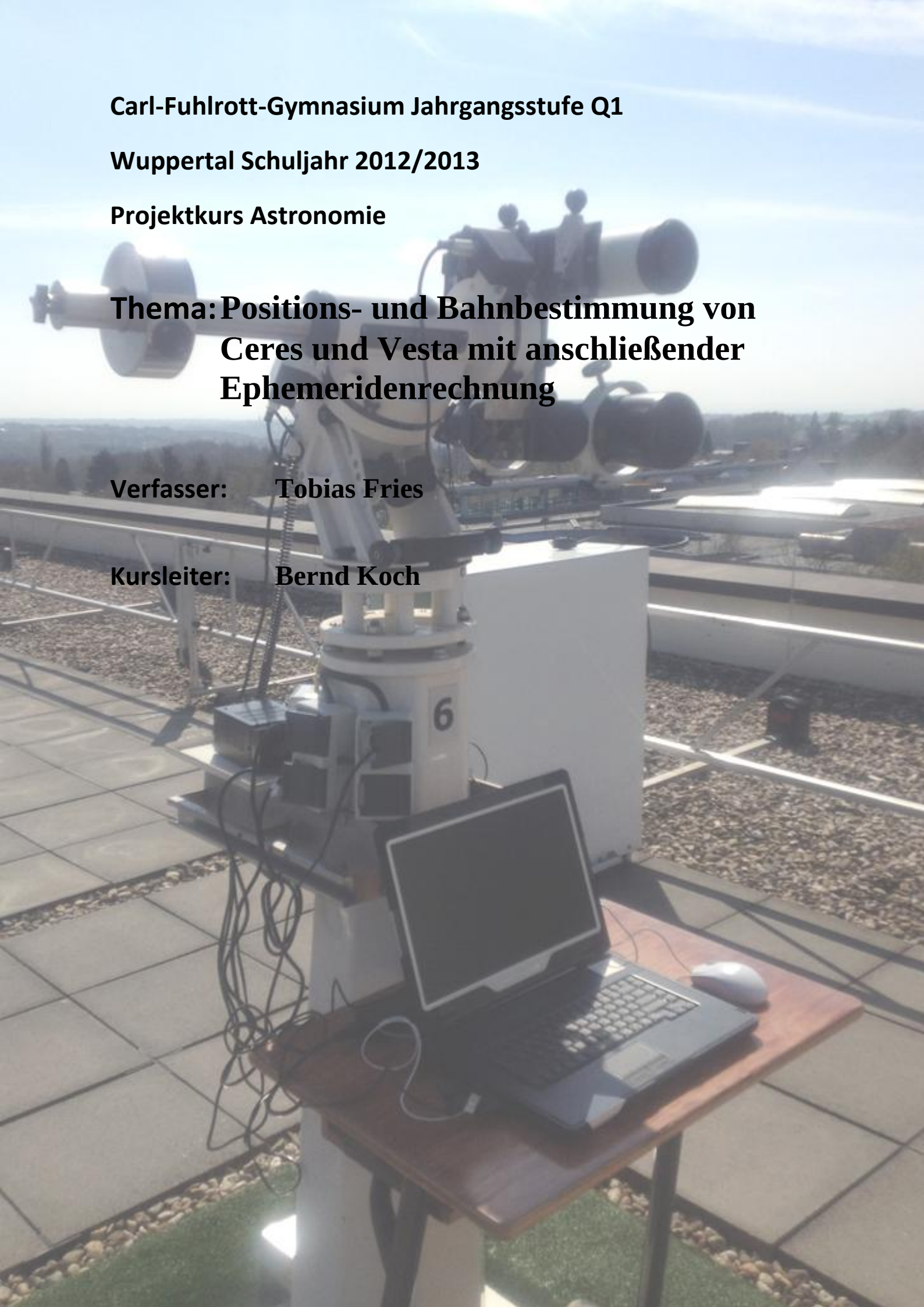


Carl-Fuhlrott-Gymnasium Jahrgangsstufe Q1

Wuppertal Schuljahr 2012/2013

Projektkurs Astronomie

Thema: Positions- und Bahnbestimmung von Ceres und Vesta mit anschließender Ephemeridenrechnung

Verfasser: Tobias Fries

Kursleiter: Bernd Koch

1 Einleitung

In einer Zeit, in der unser Sonnensystem bereits in der Grundschule zum Lernstoff dazugehört, wirkt es fast selbstverständlich, dass die Planeten einer bestimmten Bahn um die Sonne folgen. Dabei steckt hinter all den Kenntnissen über die Planetenbahnen eine Kombination aus komplexen mathematischen Gesetzen, verbunden mit genauen astronomischen Messungen.

Ich möchte mich mit dieser Projektarbeit der Bestimmung dieser Bahnen widmen. Das bedeutet, ich möchte mit eigenen Aufnahmen die Positionen meiner Objekte bestimmen, aus diesen Positionen eine Objektbahn berechnen und anschließend mithilfe dieser berechneten Bahn eine zukünftige Position meiner ausgewählten Objekte voraussagen. Die Wahl fiel dabei auf die beiden Asteroiden Ceres und Vesta, da sie zur Zeit dieser Arbeit sehr gut zu beobachten waren und insgesamt eine größere Herausforderung boten als die großen Planeten.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Koch bedanken, welcher mir über das gesamte Schuljahr neben einer astronomischen Grundausbildung eine sehr große Unterstützung für diese Projektarbeit bot und mich erst auf dieses astronomische Thema aufmerksam machte.

Auch dem CFG, den Sponsoren und insbesondere Herrn Winkhaus gebührt ein großer Dank, da sie es ermöglichten, eine solch professionelle Sternwarte auf dem Dach des Schulzentrums Süd zu errichten.

Diese Arbeit hat mir wirklich eine ganze Menge Zeit geraubt und mich manchmal in den Wahnsinn getrieben, doch es war eine einzigartige Erfahrung, durch die ich mir eine Menge astronomisches Wissen und auch Erfahrungen im Verfassen einer wissenschaftlichen Arbeit aneignen konnte. Dank Herrn Kochs ständiger Hilfe kam es außerdem nie zu langanhaltenden Problemen. Ich bin also durchaus froh, dass ich mich für den Projektkurs Astronomie entschieden habe.

2 Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
2 Inhaltsverzeichnis 2
3 Beschreibung der Kleinplaneten 3
3.1 Definition 3
3.2 Geschichte 3
3.3 Daten von Ceres 4
3.4 Daten von Vesta 5
3.5 Raumsonde Dawn 5
4 Aufnahmetechnik 6
4.1 Canon EOS 450D 6
4.1.1 CMOS-Technologie 7
4.1.2 EOS Utility 9
4.2 Pentax 75 11
4.2.1 Daten des Pentax 75 11
4.2.2 Filter „Fringe-Killer“ 13
4.3 Montierung 14
5 Durchführung und Vorbereitung der Aufnahmen 16
5.1 Fokussierung 16
5.2 Vorbereitung in Fitswork 17
6 Positionsbestimmung (Astrometrie) 21
6.1 Theorie 21
6.2 Die Software Astrometrica 23
6.2.1 Voreinstellungen 23
6.2.2 Einlesen der Bilder 27
6.2.3 Ergebnisse 28
7 Bahnbestimmung 29
7.1 Theorie 29
7.1.1 Exzentrizität 30
7.1.2 Die Keplerschen Gesetze 31
7.2 Die Software Find_Orbit 32
7.3 Ephemeridenrechnung 36
8 Schlussgedanke 39
9 Abschlusserklärung 40

3 Beschreibung der Kleinplaneten

3.1 Definition

Als Kleinplaneten oder Asteroiden bezeichnen wir Objekte in unserem Sonnensystem, welche zur Klasse der Kleinkörper gehören. Sie bewegen sich ebenso wie die acht Planeten auf einer Keplerschen Umlaufbahn um die Sonne. Aufgrund ihres geringen Durchmessers, welcher in der Regel unterhalb von 100km liegt, haben sie allerdings eine zu geringe Masse, um eine kugelförmige Gestalt zu erreichen. Daher unterscheidet man sie von den herkömmlichen Planeten.

Insgesamt sind zurzeit über 615 000 Kleinplaneten im Sonnensystem bekannt (Stand Mai 2013)[1], wobei es darunter allerdings nur etwa 8 größere Körper gibt. Ihr Durchmesser beträgt etwa zwischen 100km und 500km.

Zu den Zwergplaneten, welche am 24. August 2006 von der Internationalen Astronomischen Union (IAU) definiert wurden, zählen die 5 Himmelskörper Ceres, Pluto, Eris, Haumea und Makemake. Ihr Durchmesser liegt etwa bei 1000km bis 2000km.

Eine besondere Gruppe der Asteroiden bilden die sogenannten transneptunischen Objekte. Wie der Name bereits andeutet, handelt es sich hierbei um Objekte, welche sich außerhalb der Planetenbahn von Neptun befinden. Die meisten dieser Objekte befinden sich im „Kuipergürtel“, einer „ringförmige[n], relativ flache[n] Region“[2], aus dem unter anderem viele große Kometen stammen. Früher vermutete man, diese würden aus der „Oortschen Wolke“, einer nicht nachgewiesenen Ansammlung von Himmelsobjekten im transneptunischen Bereich, stammen.

3.2 Geschichte der Kleinplaneten

Die Geschichte der Kleinplaneten[3] beginnt mit dem Fund von Ceres im Jahr 1801. In der Neujahrsnacht des Jahres wurde im Sternbild Stier ein bisher unbekannter, schwacher Stern entdeckt.

Aufgrund einer Lücke in der 1760 entwickelten „Titius-Bode-Reihe“, welche genutzt wurde um die Verhältnisse der Planetenabstände zu messen, starteten zum Ende des 18. Jahrhunderts große Suchaktionen nach dem fehlenden Planeten. So wurde im Jahr 1800 die „Himmelspolizey“ für eine koordinierte Suche gegründet.[4]

Durch Zufall entdeckte der Astronom und Theologe Giuseppe Piazzi in der Neujahrsnacht von 1801 ein schwaches Himmelsobjekt im Sternbild Stier. Er berichtete der Himmelspolizey von seinem Fund, hielt ihn allerdings für einen Kometen. Aufgrund einer Erkrankung konnte er seine Arbeit nicht weiterführen und das Himmelsobjekt verschwand mit der Zeit in Richtung der Sonne, wo es zunächst nicht mehr auffindbar war.

---

[1] http://ssd.jpl.nasa.gov/?body_count
[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Kuipergürtel
[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Asteroid
[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Kleinplaneten#Vermuteter_Kleinplanet_und_die_Himmelspolizey

Allerdings konnte der Mathematiker Carl Friedrich Gauß mithilfe eines von ihm entwickelten Verfahrens die Bahn des Himmelsobjektes berechnen. So wurde es am 31. Dezember desselben Jahres vom Arzt und Astronomen Heinrich Wilhelm Olbers wiederentdeckt. Es bekam den Namen Ceres. Etwa 3 Monate später fand er einen weiteren Himmelskörper und nannte ihn Pallas. Außerdem entdeckte Olbers 1807 den Kleinplaneten Vesta. Der dritte Kleinplanet, Juno, wurde 1803 vom Astronomen Karl Ludwig Hardling entdeckt. Der fünfte Kleinplanet, Astraea, wurde erst im Jahr 1845 entdeckt.
Die Bezeichnung Asteroid oder Kleinplanet bekamen die Himmelskörper allerdings erst später. Sie wurden anfangs als Planeten angesehen, wodurch im Jahr 1846 statt acht Planeten insgesamt 13 Planeten gezählt wurden. Später wurden allerdings immer mehr Kleinplaneten entdeckt, weshalb sie ihre eigene Objektklasse erhielten.
Mithilfe der Fotografie, welche Ende des 19. Jahrhunderts auch in die Astronomie eingebunden wurde, konnten sehr lichtschwache Objekte gefunden werden, was die Zahl der entdeckten Kleinplaneten ein weiteres Mal stark ansteigen ließ. Einen weiteren großen Fortschritt bildete außerdem die Entwicklung der CCD-Kameratechnik zum Ende des 20. Jahrhunderts.
Am 24. August 2006 hat man sich dazu entschlossen, größere Kleinplaneten, welche ein hydrostatisches Gleichgewicht aufweisen aber keine von anderen Objekten freie Bahn haben, einer neuen Kategorie zuzuordnen – den Zwergplaneten. Zurzeit zählen 5 Himmelsobjekte zu den Zwergplaneten: Ceres, Haumea, Makemake, Eris und der vormals als Planet gewertete Pluto.

3.3 Daten von Ceres

(1) Ceres[5] ist der erste entdeckte Asteroid und das größte Objekt im Asteroiden-Hauptgürtel. Sein Name stammt von der römischen Göttin des Ackerbaus und sein astronomisches Symbol zeigt eine Sichel: ⚳ .
Ceres' Äquatordurchmesser beträgt etwa 975km, während sein Poldurchmesser etwa 909km beträgt. Somit ist er aufgrund seiner hohen Masse, welche man auf etwa $9{,}35 * 10^{20}$kg schätzt, fast kugelförmig, was ihn insgesamt zu einem Zwergplaneten macht. Der etwas niedrigere Poldurchmesser folgt aus der Eigenrotation, deren Periode 9,075 Stunden beträgt. Die mittlere Dichte von Ceres beträgt etwa 2,077 g/cm³.

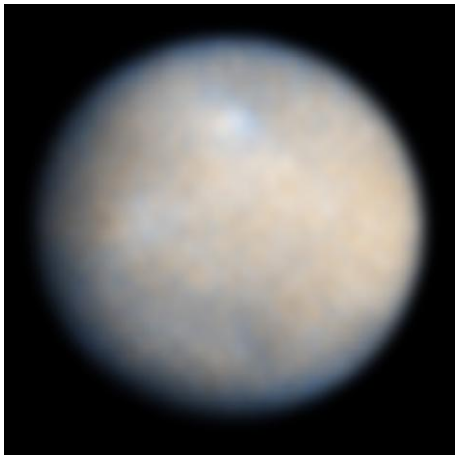


Abbildung 1: Aufnahme von Ceres durch das Hubble-Weltraumteleskop

Für die Oberfläche von Ceres gibt man 2.850.000km² an, was etwa der Fläche von Argen-tinien entspricht.
Sie besteht aus einem kohlenstoffreichen Regolith, wobei es sich dabei laut Messungen um eine Mischung aus Wassereis und leichten Mineralien handelt. Mit dem Hubble Space Telescope wurden außerdem mehrere Oberflächenmerkmale auf Ceres entdeckt, darunter

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/(1)_Ceres

ein dunkler Fleck mit einem Durchmesser von etwa 250km, welcher nach Ceres' Entdecker „Piazzi" benannt wurde, und ein großer heller Fleck mit einem Durch-messer von etwa 400km. Unterhalb der Kruste befindet der Mantel, welcher aus geschmol-zenem Wassereis besteht. Die äußeren 10km des Mantels sind allerdings noch immer gefroren. Somit besteht der Zwergplanet zu 17 bis 27 Gewichtsprozent aus Wasser und hat geschätzt etwa die fünffache Menge Süßwasser als auf der Erde. Der Kern von Ceres besteht aus Silikaten und Metallen.

3.4 Daten von Vesta

Der Kleinplanet (4) Vesta[6] ist nach (1) Ceres und (2) Pallas das zweitgrößte Himmelsobjekt im Asteroiden-Hauptgürtel. Sein Name stammt von der römischen Göttin von Heim und Herd und in Anlehnung daran zeigt sein Symbol einen Altar mit einer Flamme: .

Vesta ist mit seinem mittleren Durchmesser von etwa 516km und seiner Masse von etwa $2{,}59 * 10^{20}$kg zu klein, um als Zwergplanet zu gelten, dennoch ist er mit einer scheinbaren Helligkeit von 5,2mag der hellste Asteroid und bei guten Wetterverhältnissen auch mit bloßem Auge erkennbar. Insgesamt beträgt die Dichte von Vesta zirka 3,7 g/cm³.

Anders als die anderen Kleinplaneten im Asteroiden-Hauptgürtel weist Vesta einen erdähnlichen Aufbau auf. Er hat eine eisenhaltige Oberfläche aus Magma-Gestein mit einem hohen Mineralien-Anteil und einen Eisen-Nickel-Kern im Inneren.

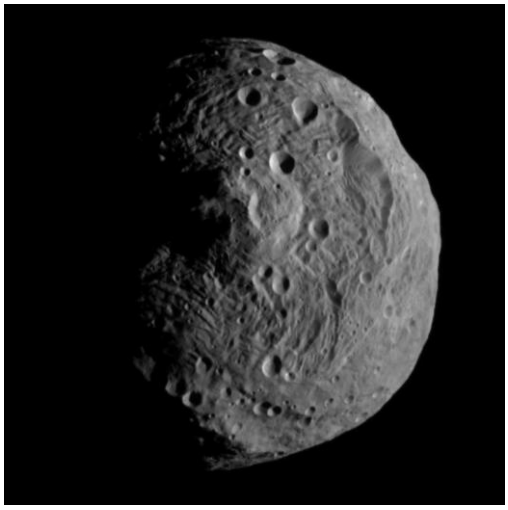


Abbildung 2: Aufnahme von Vesta durch die Raumsonde Dawn

3.5 Raumsonde Dawn

Eine wichtige Quelle für die Erforschung von Ceres und Vesta stellt die seit dem 27. September 2007 durch das Sonnensystem fliegende Raumsonde „Dawn" dar.[7] Sie ist Teil des Discovery-Programms der NASA und die erste Raumsonde, welche Objekte im Asteroiden-gürtel als Hauptziel hat. Die Gesamtkosten für die Mission betragen laut NASA etwa 357,5 Millionen US-Dollar.

Während Dawn Ceres erst im Jahr 2015 ansteuern wird, erreichte sie bereits im Juli 2011 Vesta und lieferte sehr viele Einblicke in die Oberfläche des Asteroiden.[8] So wurden insbesondere Informationen über die Topografie, Beschaffenheit und Materialien auf der Oberfläche gesammelt.

Ihr Missionsende erreicht die Raumsonde im Juli 2015 (siehe Abb. 3):

[6] http://de.wikipedia.org/wiki/(4)_Vesta

[7] http://de.wikipedia.org/wiki/Dawn_(Raumsonde)

[8] „Vorstoß zu einem Protoplaneten" von Ralf Jaumann und Thorsten Dambeck, www.sterne-und-weltraum.de

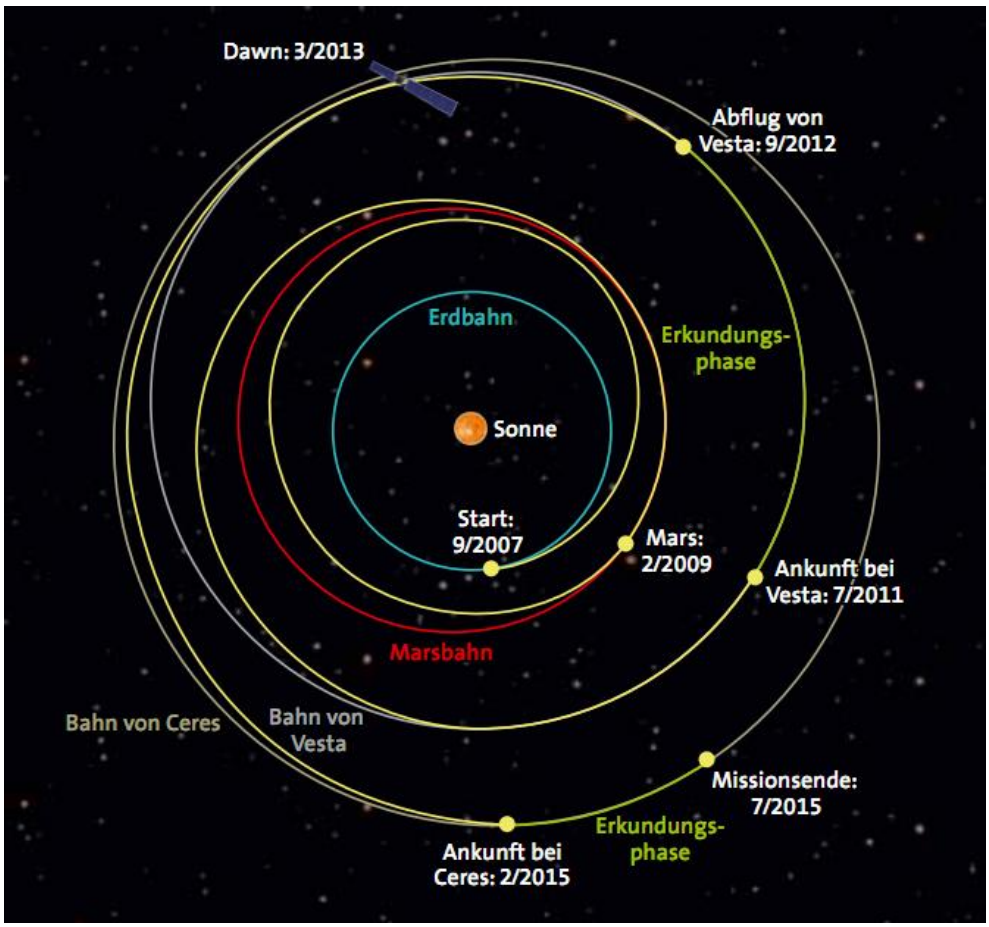


Abbildung 3: Missionsverlauf der Raumsonde Dawn[9]

4 Aufnahmetechnik

4.1 Die Kamera EOS 450D

Für diese Projektarbeit verwende ich eine für astronomische Zwecke optimierte Modifikation der digitalen Spiegelreflexkamera EOS 450D von Canon.

Abbildung 4: Gehäuse der Canon EOS 450D[10]

[9] „Vorstoß zu einem Protoplaneten“ von Ralf Jaumann und Thorsten Dambeck, www.sterne-und-weltraum.de

Es handelt sich bei der EOS 450D um eine Kamera mit sogenanntem CMOS-Sensor, dessen Größe 22,2 mm x 14,8 mm beträgt. Die Auflösung der Kamera liegt bei 4.272 x 2.848 Pixel, wobei die effektiven Pixel einen Wert von 12,2 Megapixeln haben, Außerdem sind die Pixel 5,2 µm groß. Darüber hinaus beträgt die Chipdiagonale 26,7mm.[11]
Die Modifikation der Kamera betrifft einen speziellen Filter über dem Bildsensor, welcher dafür sorgt, dass nur das Licht aufgenommen wird, welches wir mit dem menschlichen Auge sehen können. Dieser Filter wurde nun durch einen anderen Filter der Firma Baader Planetarium[12] ersetzt, dessen Lichtdurchlässigkeit einen größeren Wellenlängenbereich aufweist (siehe Abb. 5).

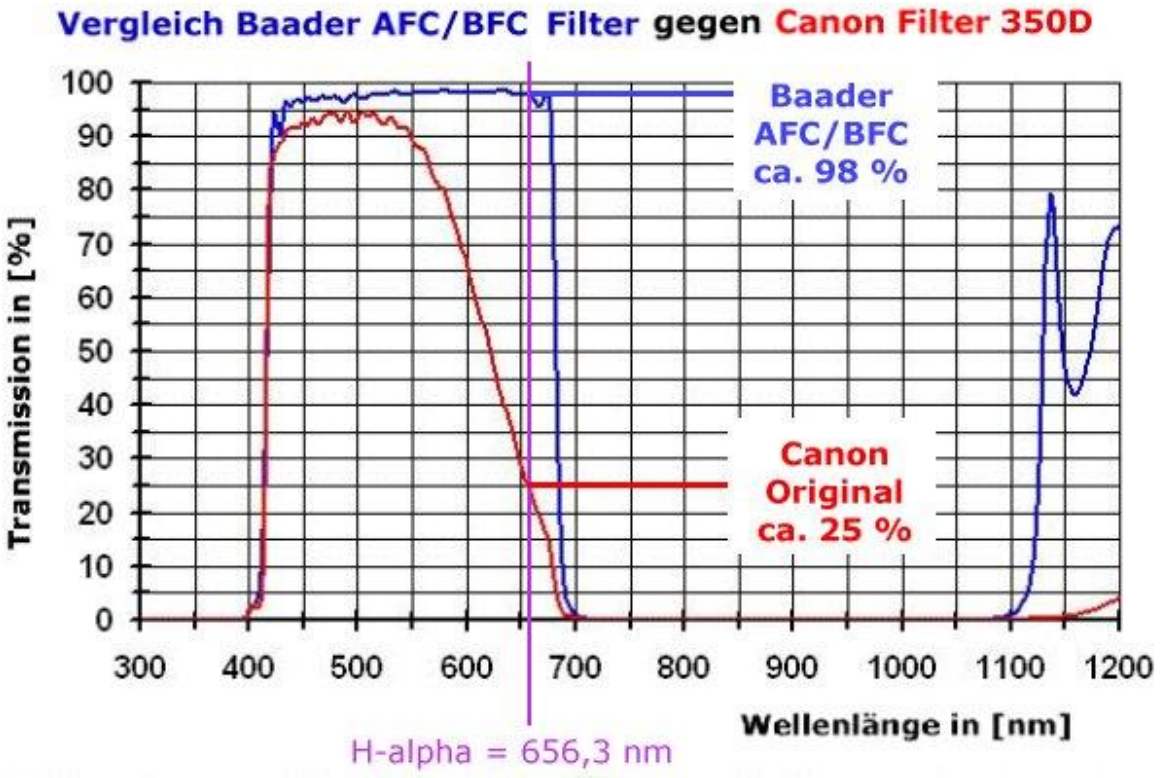


Abbildung 5: Transmissionskurve des verwendeten Baader-Filters im Vergleich zum Canon-Originalfilter[13]

4.1.1 Die CMOS-Technologie

Wie bereits angesprochen verwendet die Canon EOS 450D einen CMOS-Sensor, wobei CMOS für „Complementary Metal Oxide Semiconductor“ steht. Dies beschreibt den komplementär zueinander angeordneten Aufbau der Transistoren.
Der CMOS-Sensor nimmt die Lichtenergie der Photonen in seinen Fotodioden auf und wandelt sie anschließend in elektrische Ladungen um.[14] Dieser Prozess dauert so lange, bis die Aufnahme beendet wird. Die so gesammelte Ladung gibt dann schließlich den Helligkeitswert an (Je höher die Ladung, desto höher die Helligkeit).

---

[10] Foto von Arne Fischer
[11] Handout „Astrofotografie mit der Canon EOS 450D“ von Bernd Koch
[12] http://www.baader-planetarium.de/sektion/s45/s45.htm
[13] http://www.baader-planetarium.de/sektion/s45/s45.htm
[14] Vgl. Axel Martin, Bernd Koch, “Digitale Astrofotografie”, Oculum Verlag, Seite 24

Dieses Verfahren ähnelt sehr stark dem des ebenfalls häufig verwendeten CCD-Sensors, allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied. So werden die Daten eines CCD-Bildes gemeinsam ausgelesen, beim CMOS-Sensor wird jeder Pixel einzeln ausgelesen, was unter anderem eine für jeden Pixel separate Optimierung des Bildes ermöglicht.

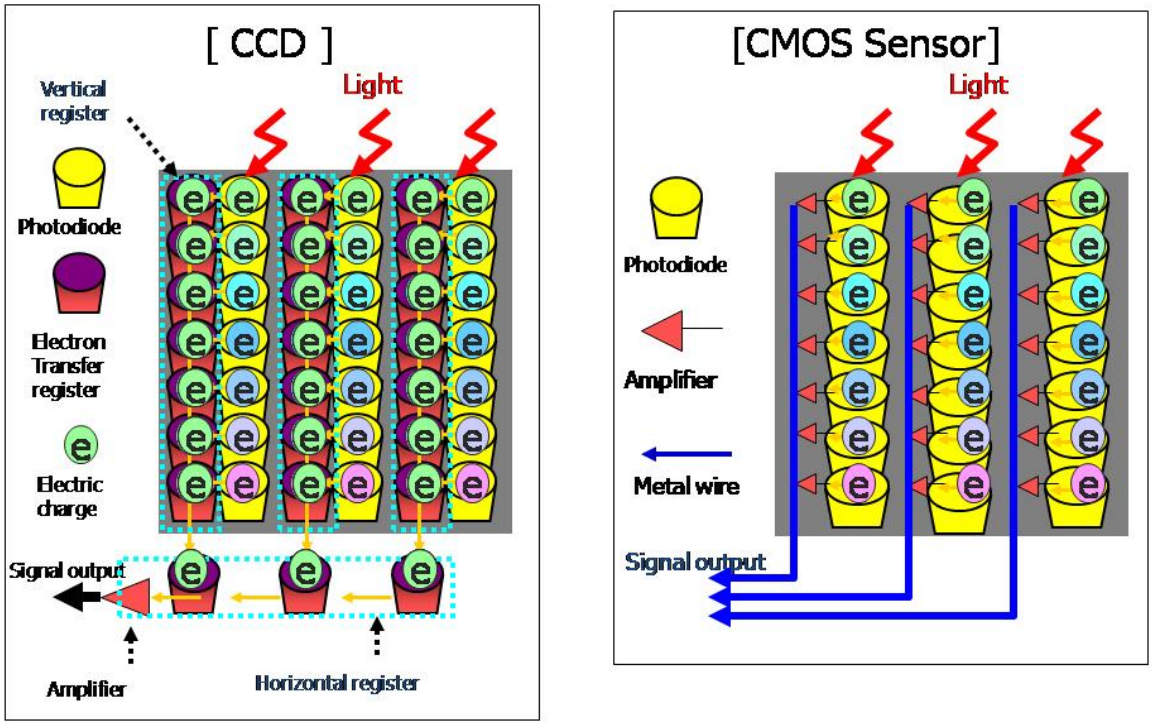


Abbildung 6: Der Unterschied zwischen CCD und CMOS[15]

Damit die Aufnahme später auch Farbe aufweist, trägt jeder Pixel einen Mikrofarbfilter, welcher jeweils nur eine von 3 Farben hindurch lässt: Grün, Blau oder Rot. Diese Farbfilter sind dabei so in einem Raster angeordnet, dass niemals zwei gleiche Farben nebeneinander liegen. Es befinden sich in dieser Anordnung genauso viele grüne Farbfilter wie rote und blaue zusammen. Dieses Raster wurde 1975 von Bryce E. Bayer entwickelt und erhielt daher auch den Namen „Bayer-Matrix“. [16]

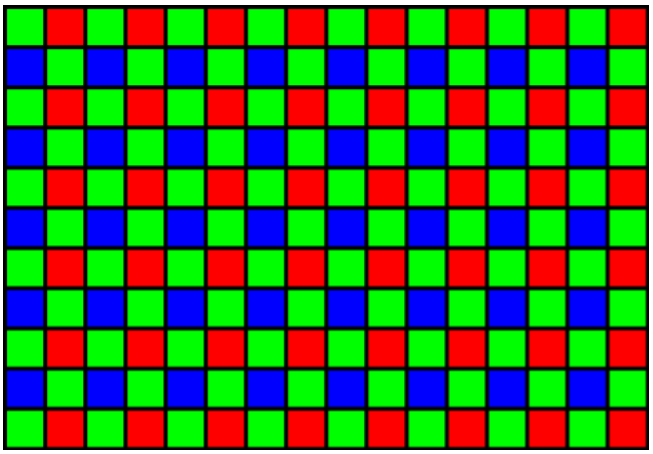


Abbildung 7: Darstellung einer Bayer-Matrix[17]

[15] http://www.smartinfoblog.com/cmos-vs-ccd-sensor
[16] http://www.patana.ac.th/secondary/science/anrophysics/ntopic14/commentary.htm
[17] http://www.patana.ac.th/secondary/science/anrophysics/ntopic14/commentary.htm

Da nun aber für jeden Pixel nur 1 Farbwert zugewiesen ist, werden mithilfe einer Farbinterpolation und den Helligkeitswerten der benachbarten Pixel jeweils alle 3 Farben für jeden Pixel festgelegt.
Um beispielsweise den roten und blauen Wert für einen grünen Pixel zu erhalten, werden die Helligkeitswerte der beiden umliegenden roten bzw. blauen Pixel addiert und dann durch 2 geteilt. Man erhält also den Durchschnitt aus den beiden Werten.
Zusätzlich ist noch ein Antialiasing-Filter vor dem Sensor angebracht, um stärkere Bildverfälschungen zu vermeiden. Ohne diesen Filter würden harte Übergänge beispielsweise aufgrund der Mittelwert-Bildung verschwommen aussehen. Der Antialiasing-Filter lässt es nun gar nicht erst zu harten Übergängen kommen, sondern er macht das Bild leicht unscharf. Somit ist die Fehlerquote der Interpolation anschließend geringer. Je nach Kamera wird das Bild nach der Aufnahme allerdings noch optimiert, das heißt, es wird unter anderem wieder geschärft.
Außerdem muss das Bildrauschen beim Aufnehmen beachtet werden. Einzelne Pixel werden dabei gestört und weisen einen veränderten Farb- oder Helligkeitswert auf. Somit haben viele Pixel oft einen anderen Wert als eigentlich gleiche Pixel. Das Rauschen entsteht sowohl bei erhöhter Empfindlichkeit der Kamera als auch bei längeren Belichtungszeiten. Dementsprechend ist das Rauschen bei astronomischen Aufnahmen sehr hoch, da aufgrund der Dunkelheit zum einen eine hohe Empfindlichkeit (hier ISO 800) und zum anderen eine lange Belichtungszeit (hier 30 Sekunden) erforderlich ist. Um dem entgegen zu wirken, lässt sich bei der Canon EOS 450D eine automatische Rauschreduktion einstellen. Diese lässt das Bild zweimal aufnehmen und gleicht diese Bilder dann miteinander ab, um das Rauschen zu identifizieren und anschließend zu reduzieren.

4.1.2 EOS Utility

Für das Aufnehmen der Bilder wird die von Canon mitgelieferte Software „EOS Utility“ verwendet. Normalerweise wird es beim Verbinden der Kamera mit dem PC über das beigelegte USB-Kabel automatisch gestartet. Im nun erscheinenden Menü wird zuerst die Option „Kamera-Einstellungen/Fernaufnahme“ ausgewählt, um die Aufnahmen auch für eine astronomische Arbeit tauglich machen zu können.

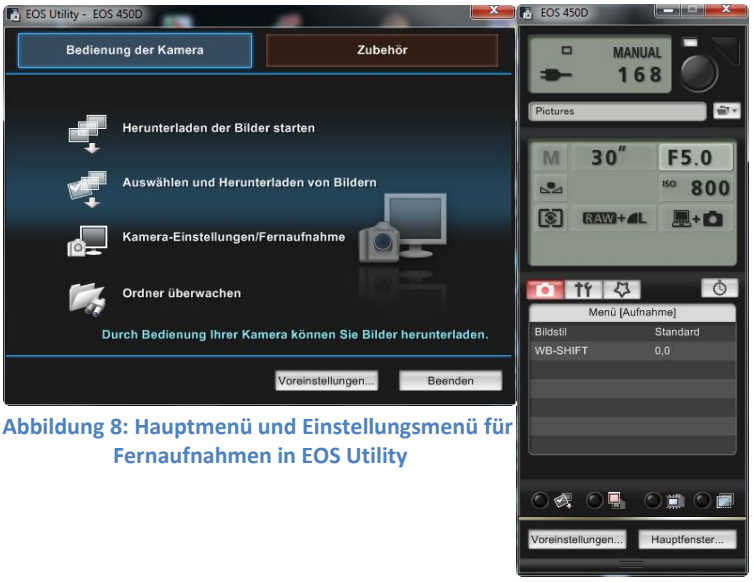


Abbildung 8: Hauptmenü und Einstellungsmenü für Fernaufnahmen in EOS Utility

Da mit den Notebooks der Sternwarte gearbeitet wird, ist es sinnvoll, als erstes einen neuen Ordner anzulegen und diesen als Speicherort für die Aufnahmen auszuwählen. Außerdem müssen noch einige Einstellungen zur Art der Aufnahme gemacht werden. So sollte das Format auf „Raw + L“ eingestellt werden, damit das Bild sowohl als Roh-Datei (Raw) für die spätere Weiterverarbeitung als auch als JPEG-Datei (L) gespeichert wird. Für die Belichtungszeit nehme ich einen für Deep-Sky-Aufnahmen sinnvollen Wert von 30 Sekunden. Den ISO-Wert, also die Empfindlichkeit des Sensors, stelle ich auf 800. Essentiell ist es außerdem, die genaue Uhrzeit zu haben. Dazu wird die Zeit am PC mithilfe einer Funkuhr richtig eingestellt. Die Kamera entnimmt diese Uhrzeit dann automatisch aus den PC-Daten.
Für die nun folgende Fokussierung wird „Remote Live View-Aufnahme“ in der unteren Leiste des Fensters ausgewählt. Es öffnet sich ein weiteres Fenster, welches das Bild so darstellt, wie es durch das Teleskop zu sehen ist. In diesem Fall werden wir allerdings beim Aufnehmen der Kleinplaneten nichts zu sehen bekommen, da diese zu lichtschwach sind. Erst durch die längere Belichtungszeit lassen sich die Objekte erkennen. Hat man ein Objekt für die Fokussierung gefunden (wie zum Beispiel den Planeten Jupiter), sollte man dieses über die Teleskopsteuerung möglichst gut sichtbar in das Live View-Feld bringen. Nun kann das Bild am Regler des Teleskops scharf gestellt werden.

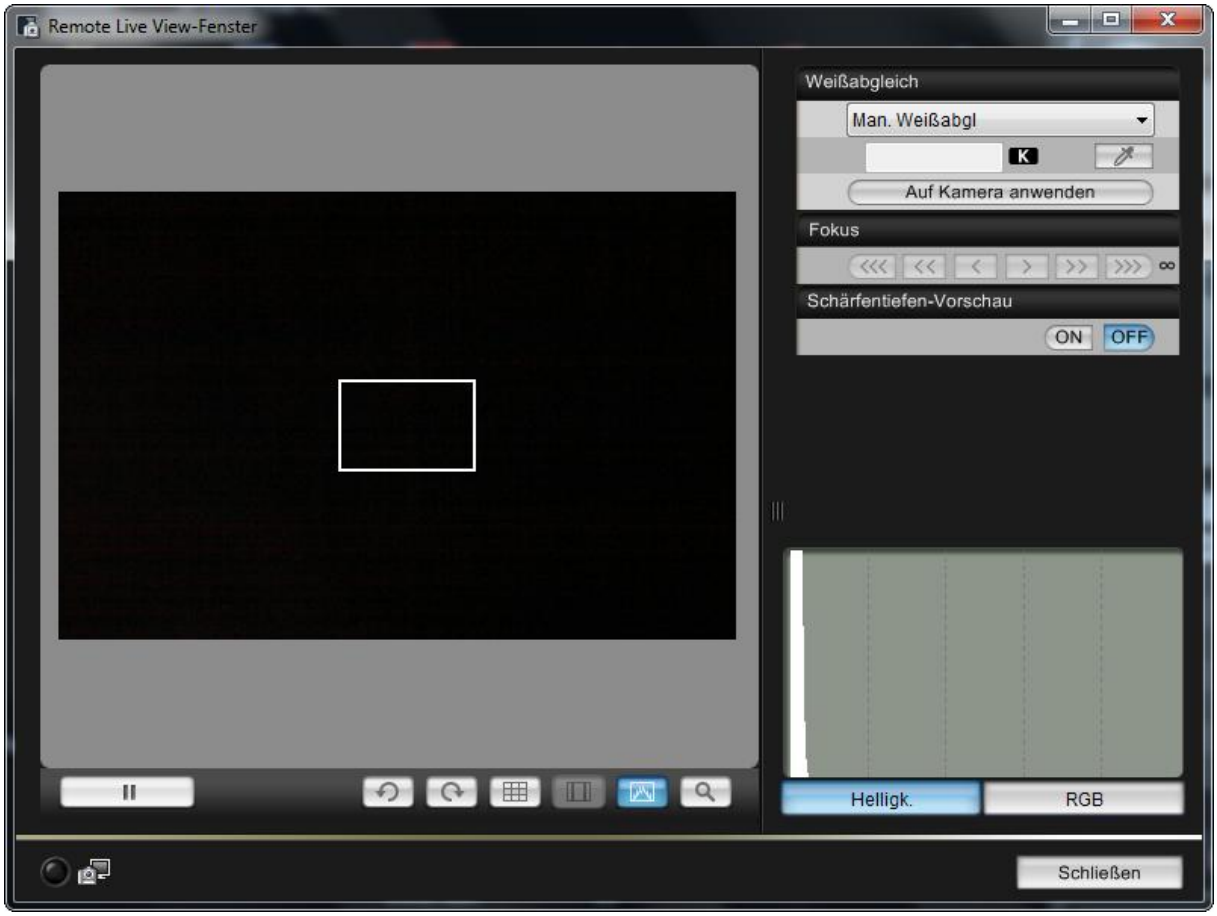


Abbildung 9: Live-View Fenster von EOS Utility

Für eine noch feinere Scharfstellung bietet sich die „Lupe“ rechts unten in der Optionsleiste an, um das Bild vergrößert darzustellen.

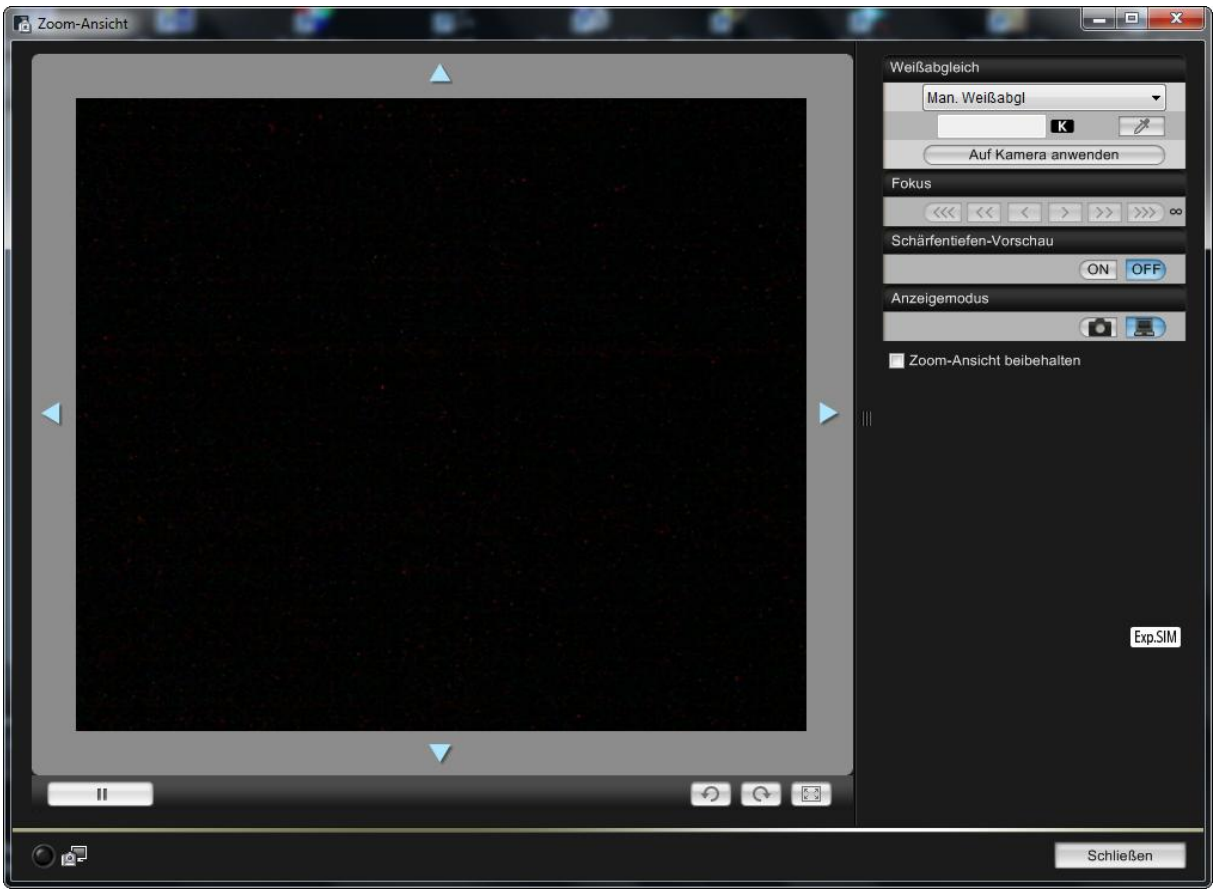


Abbildung 10: Lupe in EOS Utility

Ist alles eingestellt und wurde das Teleskop in Richtung des gesuchten Kleinplaneten bewegt, kann der runde Knopf oben rechts im Aufnahmemenü für einige Testaufnahmen gedrückt werden. Notfalls muss an der Belichtungszeit oder der Empfindlichkeit etwas geändert werden.

4.2 Das Teleskop Pentax 75

4.2.1 Daten des Pentax 75

Zweiter essentieller Bestandteil einer astronomischen Aufnahme ist das Teleskop. Zwar wird für hochauflösende Aufnahmen, insbesondere jenen im Deep-Sky Bereich, bevorzugt das größere Teleskop Celestron 11 verwendet, allerdings reicht für die Positions- und Bahnbestimmung von Ceres und Vesta bereits das Pentax 75 SDHF der Firma Baader Planetarium aus, welches folgende Eigenschaften aufweist:[18]

[18] http://www.baader-planetarium.de/pentax/pentax.htm#75

Typenbezeichnung	Pentax 75SDHF
Optischer Aufbau	3 Linsen / 3 Gruppen
Freie Öffnung	75 mm
Brennweite	500 mm
Öffnungsverhältnis	1:6,7
Grenzgröße visuell	11,5 m
Auflösungsvermögen	1,55‘‘
Lichtsammelvermögen	115 x
Tubusdurchmesser	75 mm
Länge über alles	530 (480) mm
Gewicht	2,2 kg

Abbildung 11: Foto des Pentax 75 SDHF der Firma Baader Planetarium[19]

Das Pentax 75 bietet die Möglichkeit, diverse Kameras und Filter anzuschließen, was sie für einen Großteil astronomischer Arbeiten tauglich macht. Aufgrund der Art des optischen Aufbaus sind mit dem Teleskop sehr hochauflösende Bilder möglich. Auch das Bildfeld des Pentax 75 ist recht groß. Es lässt sich folgendermaßen berechnen:[20]

$$\alpha = 2 * tan^{-1}\left(\frac{a}{2 * f}\right)$$

[19] Foto von Arne Fischer

[20] Bernd Koch, „Astrofotgrafie mit der Canon EOS 450D“, Seite 3

Höhe des Bildfeldes in Grad: α
Höhe des Kamerasensors: a = 14,8mm
Brennweite des Pentax 75: f = 500mm

Eingesetzt ergibt sich daraus für α ein Wert von 1,6955°. Umgerechnet entspricht dies etwa 1° 41‘.

Dasselbe gilt für die Breite des Bildfeldes:

$$\beta = 2 * tan^{-1}\left(\frac{b}{2 * f}\right)$$

Breite des Bildfeldes in Grad: β
Breite des Kamerasensors: b = 22,2mm
Brennweite des Pentax 75: f = 500mm

Die Breite beträgt nach dieser Formel etwa 2° 33‘.
Man hat also insgesamt ein Gesichtsfeld von 2° 33‘ x 1° 41‘.

Der Abbildungsmaßstab wird mit einer ähnlichen Formel berechnet:[21]

$$\alpha = 206 * \frac{a}{f}$$

Abbildungsmaßstab in Bogensekunden/Pixel: α
Pixelgröße des Kamerasensors: a = 5,2µm
Brennweite des Pentax 75: f = 500mm

Eingesetzt erhält man für α einen Wert von 2,14 [‘‘/Pixel]

4.2.2 Filter „Fringe Killer“

Abbildung 12: "Fringe Killer"[22] der Firma Baader Planetarium

[21] Bernd Koch, „Astrofotgrafie mit der Canon EOS 450D“, Seite 3
[22] http://www.baader-planetarium.de/sektion/s41/s41.htm

Zwischen Teleskop und Kamera wird für diese Projektarbeit außerdem noch ein spezieller Filter eingebaut, der sogenannte „Fringe Killer“ der Firma Baader Planetarium. Er sorgt für ein deutlich detailliertes Bild, da laut Baader mehr als 50% des störenden blauen Spektralbereichs abgeblockt wird. Der Vorteil im Vergleich zu vielen anderen Filtern ist, dass die Belichtungsdauer dieselbe bleibt wie ohne Filter, wodurch weitere Ungenauigkeiten aufgrund sich ständig ändernder Sichtverhältnisse vermieden werden.
Anhand des Sonnenspektrums zeigt die Firma auf der Produktwebsite den Vergleich mit und ohne Fringe Killer (siehe Abb. 13):

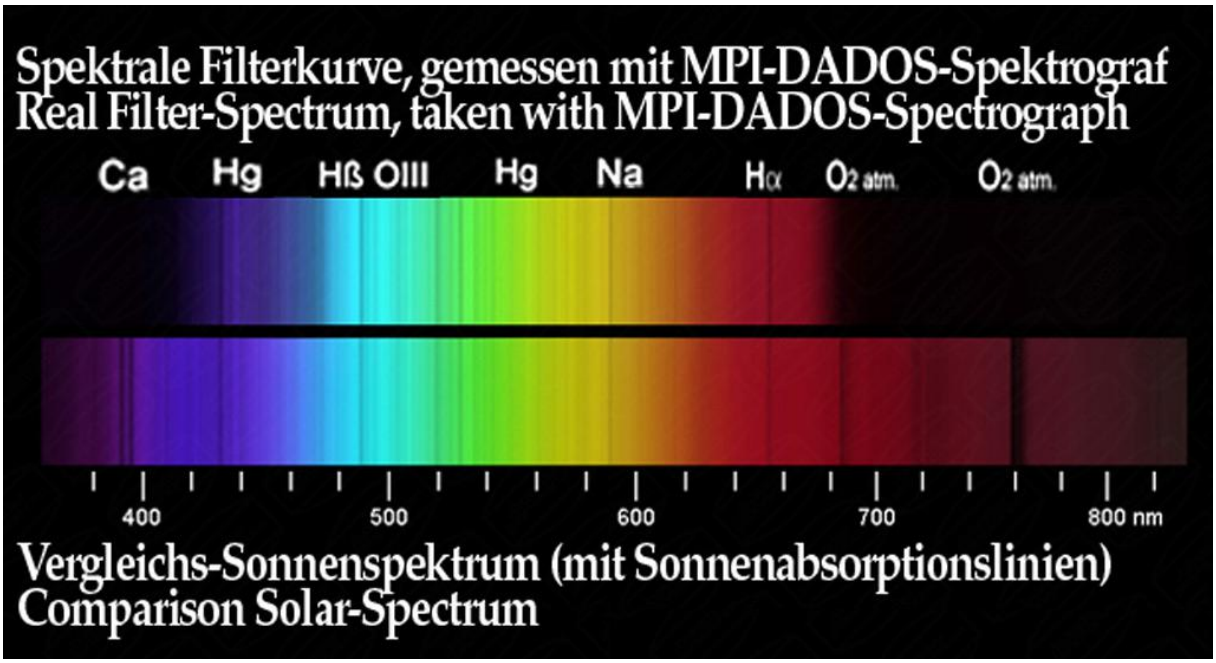


Abbildung 13: Transmissionskurve des Sonnenspektrums mit (oben) und ohne (unten) Fringe Killer[23]

4.3 Montierung

Abbildung 14: Astro Physics 900GTO mit Steuereinheit[24]

[23] http://www.baader-planetarium.de/sektion/s41/bilder/fkiller_sonnenspektrum_gross.jpg

Das Grundgerüst für die Sternwarte bildet die Montierung „900GTO“ der Firma Astro Physics, welche auf einem parallaktischen Prinzip basiert. Das bedeutet, die Stundenachse verläuft genau parallel zur Erdachse und die zweite Achse liegt senkrecht zu dieser, wodurch hier nachgeführt werden kann ohne eine Änderung des Bildes im Bildfeld befürchten zu müssen.

Mit der mitgelieferten Steuereinheit lässt sich die Montierung automatisch zu den wichtigsten Sternen, Planeten oder anderen Himmelsobjekten bewegen. Für diese Projektarbeit ist diese Funktion aber eher nebensächlich, da sich Ceres und Vesta nicht im Objektkatalog der Steuerung befinden.

Der fertige Aufbau für die Beobachtungen sieht folgendermaßen aus (siehe Abb. 15):

Abbildung 15: Kompletter Aufbau der Aufnahmeeinrichtung[25]

[24] http://www.astro-physics.com/?products/mounts/900gto/900gto

[25] Foto von Arne Fischer

Die Montierung beinhaltet allerdings auch das Problem einer zunehmenden Ungenauigkeit. So folgt die Montierung einer vorher festgelegten Programmierung, was bei der Nachführung zu strichförmigen Bildern führen kann. Aus diesem Grund wird an die Montierung eine sogenannte „Guiding-Kamera“ angeschlossen. Insgesamt beträgt die Ungenauigkeit pro Sekunde etwa 0,0039“, was bei der von mir verwendeten Belichtungszeit von 30 Sekunden nicht auf dem Foto zu erkennen ist. So entspricht ein Pixel bei einer Aufnahme mit dem Pentax 75 und der Canon EOS 450D 2,14 Bogensekunden.[26] Somit sollte der Wert der Ungenauigkeit darunter liegen. Für die Berechnung der maximalen Belichtungszeit wird daher mit den Werten für die Ungenauigkeit pro Sekunde und das Bogenmaß eines Pixels folgende Formel verwendet:

$$2{,}14 = t * 0{,}0039$$

Umgeformt ergibt sich für t ein Wert von etwa 548,7 Sekunden. Somit wirkt sich der Fehler bei einer Belichtungszeit von 30 Sekunden nicht spürbar auf die Aufnahmen aus. Was jedoch auch beachtet werden muss, sind zum einen Wind und Erschütterungen während der Belichtung aber auch, dass die Stundenachse möglichst genau parallel zur Erdachse ausgerichtet sein muss, da sonst Abweichungen in Deklination entstehen. Diese Faktoren müssen also beachtet werden, damit die Aufnahmen ohne spürbaren Fehler gemacht werden können.

5 Durchführung der Aufnahmen

5.1 Fokussierung

Ceres und Vesta sind sehr kleine und schwache Objekte. Dies macht sie mit dem normalen Auge nicht sichtbar. Man erkennt sie nur durch eine längere Belichtungszeit von etwa 30 Sekunden.

Aus diesem Grund muss das Teleskop mithilfe eines anderen, sichtbaren Objekts und der Ansicht der „EOS Utility“ scharf gestellt werden. Zur Zeit dieser Projektarbeit bot sich dafür zum Beispiel der Planet Jupiter an. Man kann hier zum Anvisieren die Fernbedienung der Sternwarten-Station verwenden, da Jupiter bereits im Katalog unter „Sol“ (für Solarsystem) gespeichert ist. Somit wird zuerst anhand des Planeten das Objektiv eingestellt und anschließend das Teleskop über die Software „TheSky“[27] zum Kleinplaneten bewegt.

Dazu muss im Programmfenster von TheSky die Tastenkombination Strg+F gedrückt werden um im anschließenden Fenster das gesuchte Objekt einzutragen. Ein Klick auf „Find“ lässt ein neues Fenster öffnen, welches Information zum Objekt und einige Optionen enthält. Die linke Schaltfläche mit der Bezeichnung „Center“ lässt das Teleskop in Richtung des Objekts bewegen.

[26] Bernd Koch, „Astrofotgrafie mit der Canon EOS 450D“, Seite 3

[27] http://www.bisque.com/sc

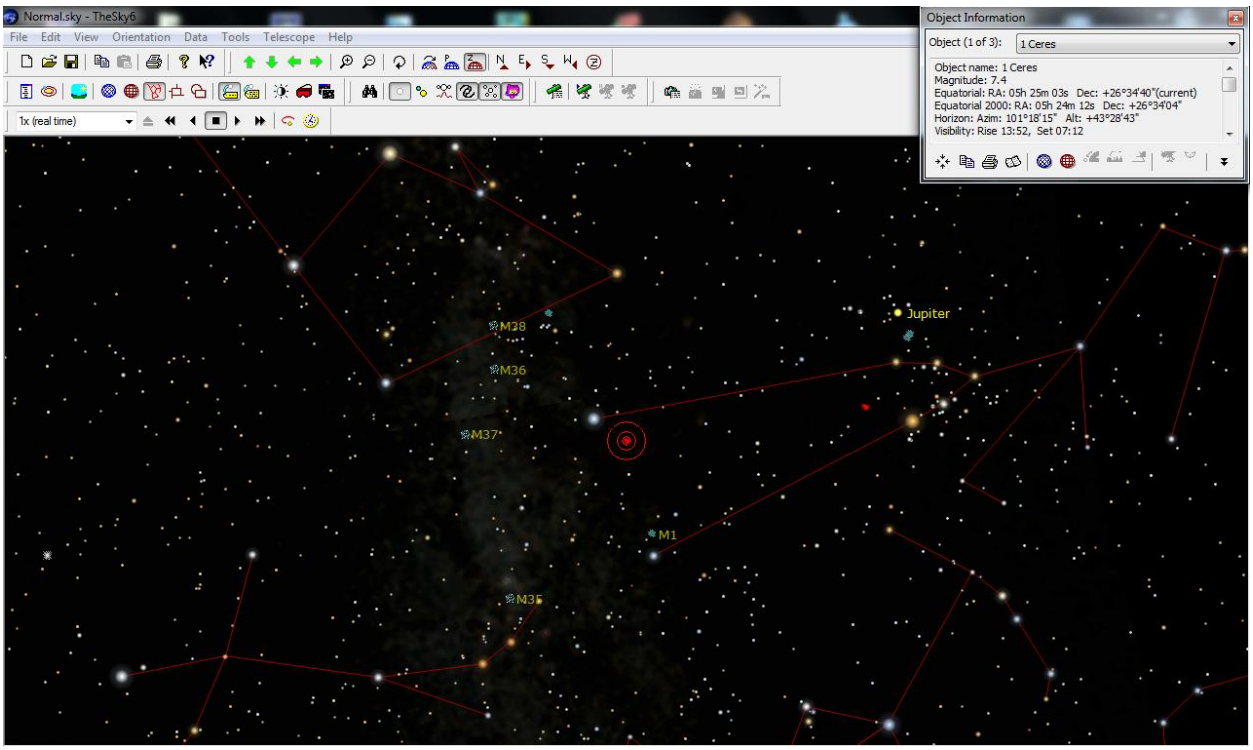


Abbildung 16: Programmfenster von TheSky, Position von Ceres am 11.1.2013 um 19:00 (UT)

Nun lassen sich einige Aufnahmen machen, welche anschließend mit einer Sternkarte verglichen werden müssen. Dadurch lässt sich die Position des gesuchten Objekts im Vergleich zu den anderen sichtbaren Objekten erkennen. Dies geht zum einen mit der vorher verwendeten Software „TheSky“, aber auch andere Programme, wie das sehr einfach zu bedienende „Stellarium“[28] bieten sich hierfür an.

Hat mein sein Objekt anhand von bestimmten Mustern, zum Beispiel drei in Reihe stehende Sterne, erkannt, sollte es möglichst in die Mitte des Aufnahmebereichs gesetzt werden. Also wird noch einmal die Fernbedienung verwendet, um das Teleskop manuell in die richtige Position zu rücken. Wichtig ist, dass man dieses dabei nur sehr langsam und vorsichtig bewegt, weil dies mehr oder weniger „blind“ geschieht. Ist man zu schnell, muss man unter Umständen noch einmal von vorne beginnen und den Kleinplaneten erneut über „TheSky“ suchen.

Hat man das Objekt schließlich deutlich im Aufnahmebereich, können die Fotos mithilfe der Software EOS Utility geschossen werden. Pro Objekt sollten hier mindestens 20 Bilder gemacht werden, da einige Aufnahmen oftmals verwackelt sind und aussortiert werden müssen. Dies lässt sich beispielsweise an einer ovalen Form der Sterne feststellen. Glücklicherweise war aber keines meiner Bilder verwackelt.

5.2 Vorbereitung der Aufnahmen in Fitswork

Im jetzigen Zustand können die Bilder noch nicht verarbeitet werden. Sie liegen noch im Rohformat mit der Dateiendung „.CR2“ vor und müssen für das Einlesen in Astrometrica[29] in

[28] http://www.stellarium.org/

[29] http://www.astrometrica.at/

das Fits-Format konvertiert werden. Dafür suche ich mir zuerst für beide Kleinplaneten jeweils eine Aufnahme am Anfang, eine Aufnahme am Ende und drei Aufnahmen mittendrin heraus, welche ich später weiterverwende.
Um diese nun zu konvertieren, verwende ich das Programm „Fitswork“[30]. Dieses bietet als eines der wenigen Programme, Bilder in das, außerhalb astronomischer Arbeiten eher unübliche, Format „.fits“ umzuwandeln.
Bevor die Bilder konvertiert werden, sollten zuvor die Einstellungen in Fitswork überprüft werden. Das Einstellungsmenü wird im Programmfenster über den Reiter „Einstellungen“ geöffnet. Das Programm sollte folgendermaßen eingestellt sein (siehe Abb. 17):

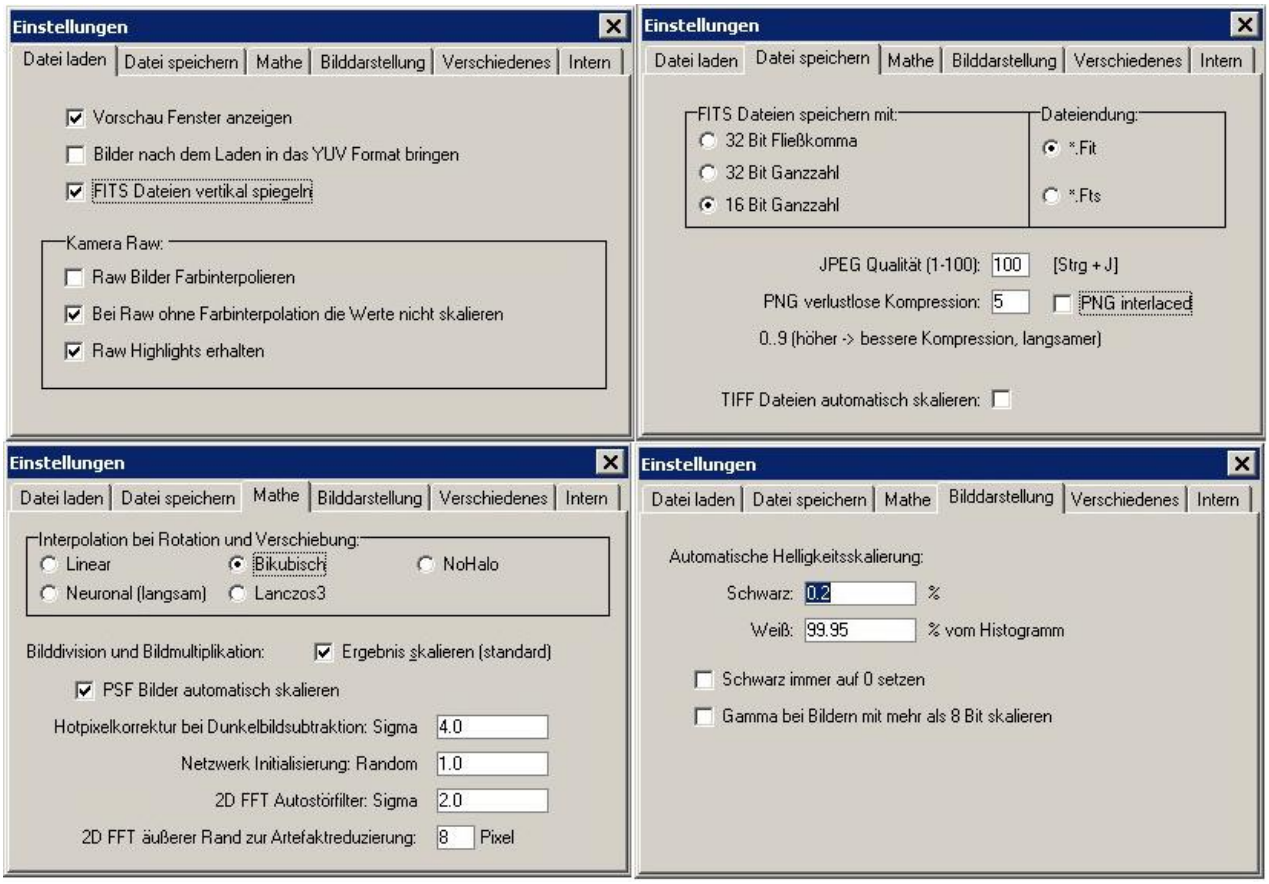


Abbildung 17: Einstellungen in Fitswork

Diese Einstellungen sorgen hauptsächlich dafür, dass bei der Konvertierung keine Verfälschungen auftreten. So können zum Beispiel bei einem falschen Wert bei der „Hotpixelkorrektur“ Sterne als sogenannte „heiße Pixel“, das heißt überbelichtete Bildfehler, erkannt werden. Dadurch kann das fertig umgewandelte Bild unter Umständen von der Originalaufnahme abweichen und die Positionen der Objekte später nicht mehr richtig erfasst werden.
Wurde alles eingestellt, kann das gewünschte Bild hinein geladen werden.

[30] http://www.fitswork.de/software/

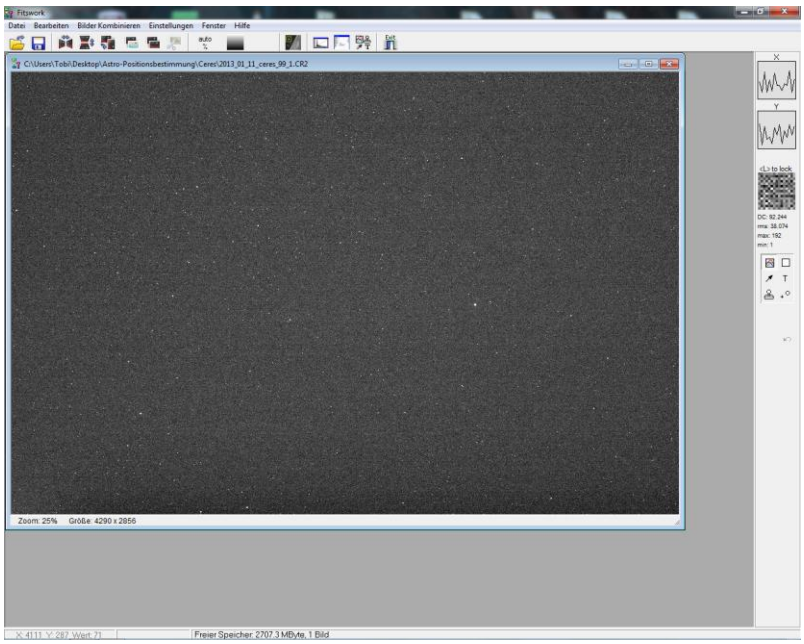


Abbildung 19: Eine Rohaufnahme wurde in Fitswork geladen

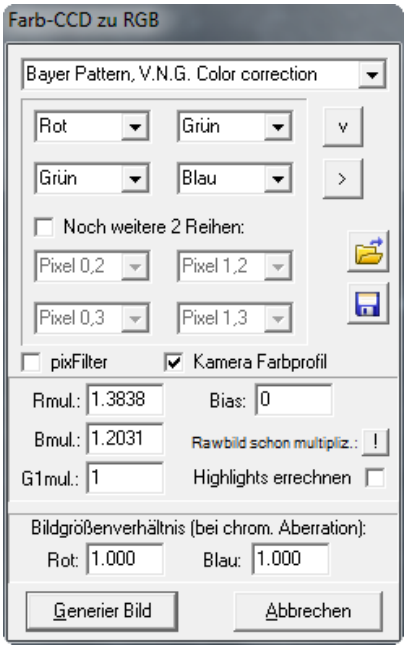


Abbildung 18: Fenster zur Konvertierung vom Raw-Bild zum RGB-Bild

Den ersten Schritt bildet nun die Option „Farb-CCD zu RGB Bild“ unter „Bearbeiten“ -> „CCD“. Dadurch wird die Datei vom Aufnahme-Format in ein Bild-Format konvertiert. Die Einstellungen im nun erscheinenden Fenster können vernachlässigt werden. Ein Klick auf „Generiere Bild“ erstellt aus der eingelesenen Datei ein RGB-Bild.

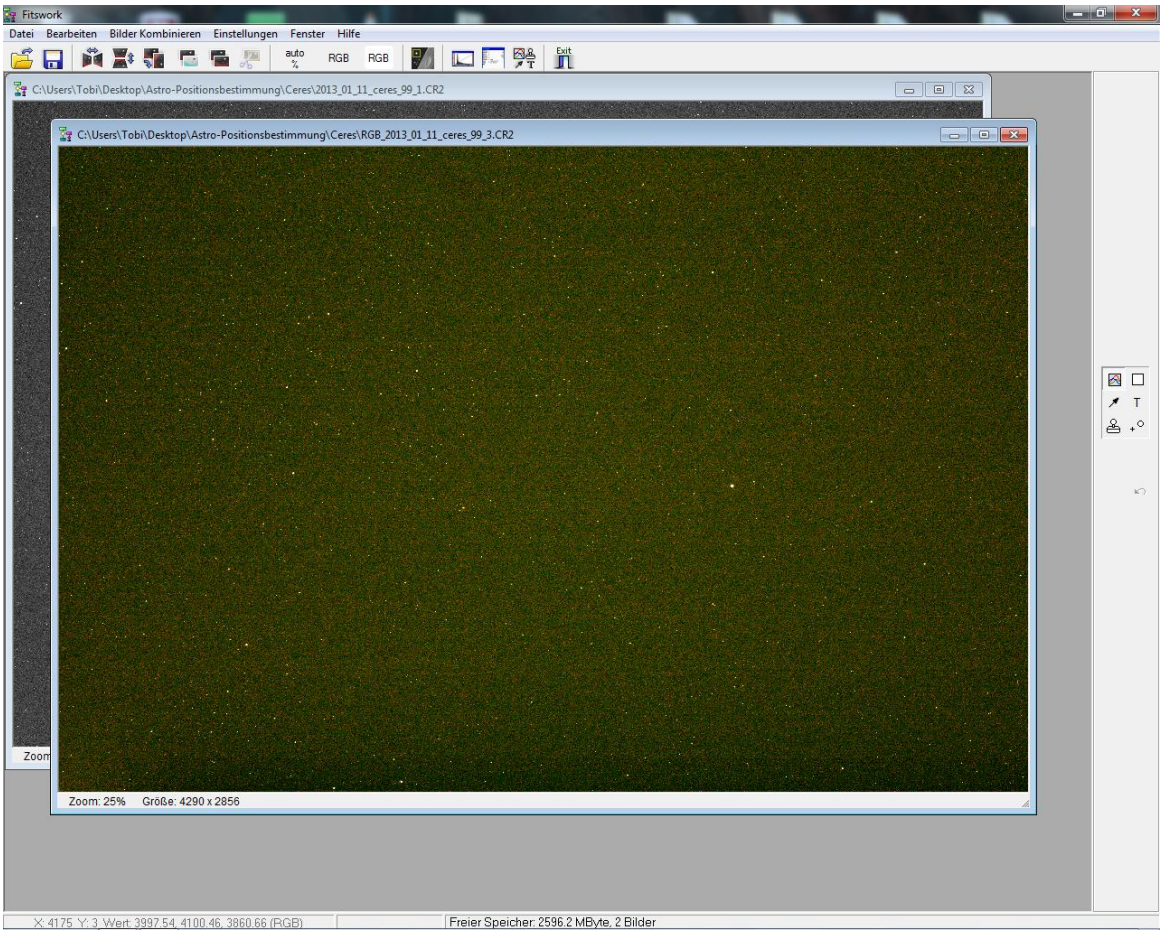


Abbildung 20: Rohaufnahme wurde in ein RGB-Format konvertiert

In dieser Form ist das Bild allerdings auch noch nicht für eine Messung tauglich. Dazu muss es in ein Graustufen-Bild umgewandelt werden. Man wählt also im Reiter „Bearbeiten“ die Option „Farb-Bild in s/w umwandeln (Luminanz)“ aus. Das nun erstellte Bild kann dann im Fits-Format, 16 Bit abgespeichert werden.

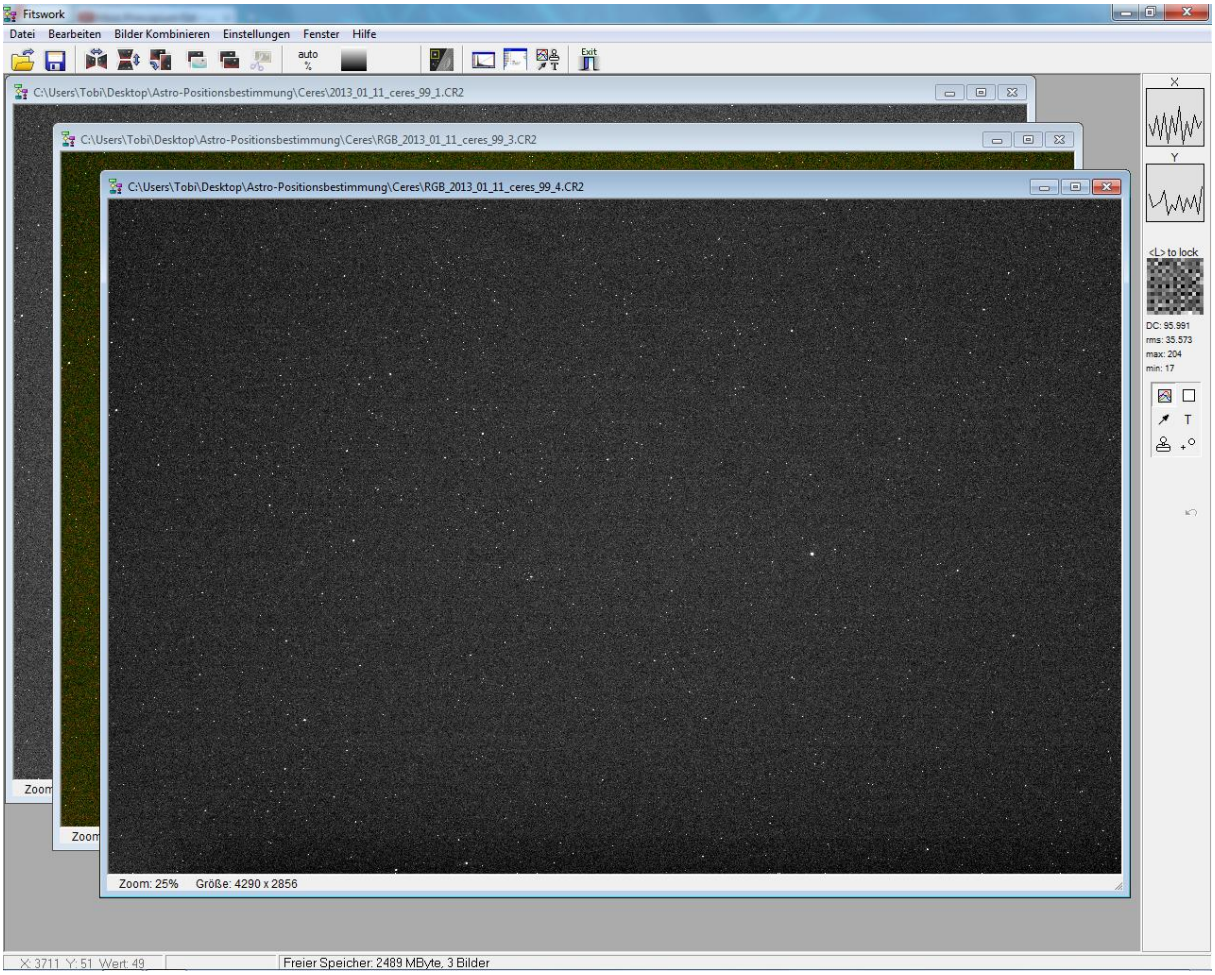


Abbildung 21: RGB-Bild wurde in ein Graustufen-Bild umgewandelt

Wichtiger Hinweis: Das Programm ändert automatisch die Nummerierung des Bildes bei der Konvertierung. So wurde eines meiner Bilder zum Beispiel von „2013_01_11_ceres_99_1.CR2“ in „2013_01_11_ceres_99_4.fit“ umbenannt. Darauf muss also geachtet werden, um spätere Probleme zu vermeiden.

Abbildung 22: Problem mit dem Dateinamen

Diese Schritte werden für jedes der 10 Aufnahmen durchgeführt, damit sie für die darauffolgende Positionsbestimmung vorbereitet sind.

6 Positionsbestimmung (Astrometrie)

Heutzutage sind Computer aus der Astrometrie nicht mehr wegzudenken. Sie sind genauso wichtig wie Teleskope im Sammeln, Organisieren und Analysieren von Informationen.[31]
Den ersten Schritt zur Bahnbestimmung von Ceres und Vesta stellt die Bestimmung ihrer Positionen zu verschiedenen Zeitpunkten dar. Dies geschieht mit der Software Astrometrica vollautomatisch. Es arbeitet nach den bekannten Regeln zur Positionsbestimmung astronomischer Objekte.

6.1 Theorie

Im Folgenden wird die Theorie der Positionsbestimmung anhand dieser Grafik erläutert (siehe Abb. 23):

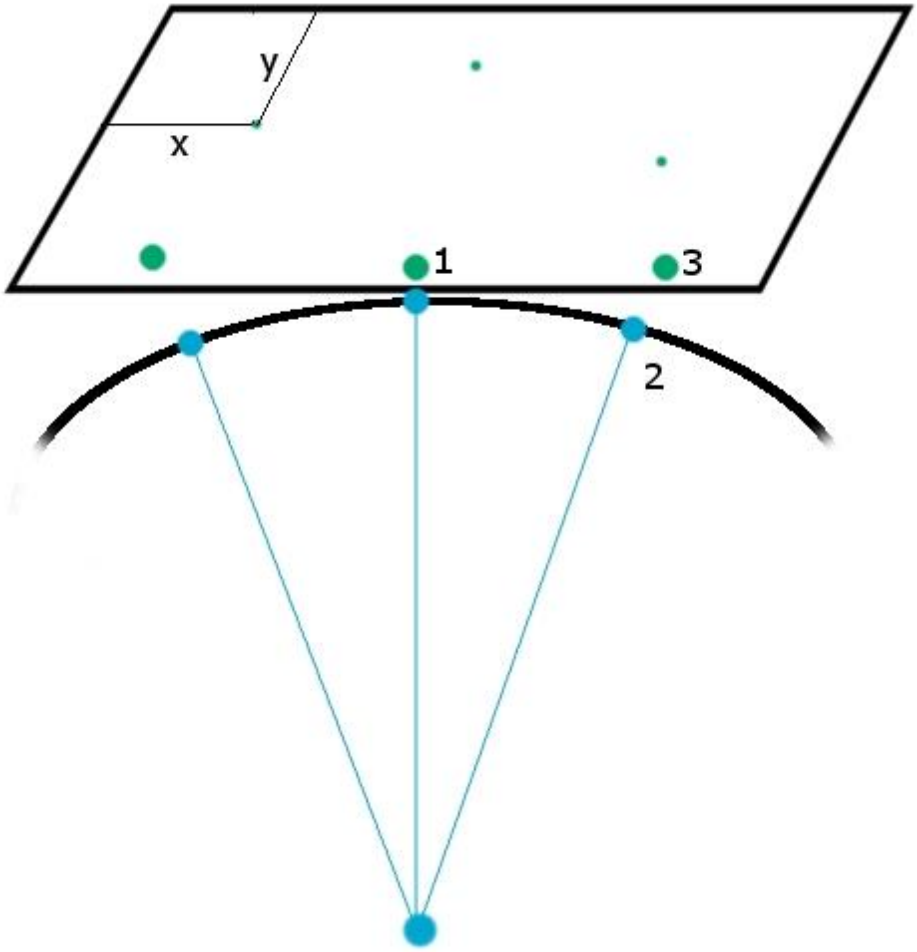


Abbildung 23: Veränderung der Positionen bei einer Aufnahme (Grafik: Tobias Fries)

[31] Luke Schmidt, „Minor Planet Astrometry“

Der untere schwarze Punkt in Abb. 23 stellt hier den Standort des Beobachters bzw. der Kamera dar. Diese ist nach oben in Richtung des Himmels gerichtet. Aus unserer Sicht befinden wir uns innerhalb einer „Kugel“, deren Innenseite den Sternenhimmel darstellt, weshalb über dem Beobachter in der Grafik ein Halbkreis gezeigt wird. Über diesem befindet sich ein Rechteck, welches den Bildsensor der Kamera darstellt. Auf diesem wird das Licht, also in unserem Fall alle sichtbaren Himmelsobjekte, abgebildet, welche durch die blauen Punkte symbolisiert werden.
Man erkennt, dass die Abbildungen der Himmelsobjekte auf den Kamerasensor immer stärker vom realen Standort abweichen, je weiter sie von der Mitte der Abbildung entfernt sind. Dementsprechend ist die Mitte der Aufnahme (Plattenmitte) der Punkt, an dem Bild und realer Standpunkt übereinstimmen (1). Man bezeichnet diesen Punkt bei der Berechnung mit den Himmelskoordinaten A und D. Diese geben die Position der Rektaszension (A) und der Deklination (D) der Plattenmitte an.
Alle anderen Objekte erhalten zwei unterschiedliche Koordinatenbezeichnungen: Die Himmelskoordinaten (2) tragen die griechischen Buchstaben α (Rektaszension) und δ (Deklination), während die Koordinaten auf der Aufnahme, die sogenannten Standardkoordinaten, die Buchstaben ξ und η tragen. Die Aufgabe besteht nun darin, die tatsächlichen Koordinaten auf die Koordinaten in der Aufnahme zu übertragen. Dafür gibt es zwei Formeln, welche jeweils die Rektaszension und die Deklination des vermessenen Objekts ermitteln:

$$\xi = \frac{\sin(\alpha - A)}{\sin D * \tan\delta + \cos D \cos(\alpha - A)}$$

$$\eta = \frac{\tan\delta - \tan D * \cos(\alpha - A)}{\tan D * \tan\delta + \cos(\alpha - A)}$$

Diese Formel muss nun zunächst auf mindestens 3 Referenzsterne angewendet werden. Die Himmelskoordinaten, also α und δ lassen sich zum Beispiel über die Software „Stellarium“ herausfinden und auch die Koordinaten der Aufnahmemitte, A und D, sind bekannt, da sie den angesteuerten Bereich während der Aufnahme angeben. Um die Werte der Rektaszension und Deklination in die Rechnung einbringen zu können, müssen sie zuerst als Grad/Stunden angegeben werden und die Werte für Bogenminuten/Minuten und Bogensekunden/Sekunden als Anteile von Grad/Stunden hinzuaddiert werden. Da diese Werte einen Winkel beschreiben, müssen sie außerdem noch in Stunden umgewandelt werden. Dazu muss der berechnete Wert erst in einen Anteil von 360° umgewandelt werden und dieser dann mit 24h multipliziert. Diese Stundenwerte können dann schließlich in die Formel eingesetzt werden.
Hat man mithilfe dieser Formel nun die Standardkoordinaten von jeweils 3 Referenzsternen berechnet, müssen die sogenannten Plattenkonstanten bestimmt werden:

$$\xi - x = ax + by + c$$
$$\eta - y = dx + ey + f$$

Für die x- und y-Werte wird das Bild wie ein Koordinatensystem vermessen. Üblich ist es hierbei, Pixel oder Bruchteile von Pixeln als Maßeinheit zu verwenden. Über ein lineares

Gleichungssystem lassen sich die 6 Plattenkonstanten a, b, c, d, e und f schließlich berechnen.
Um nun die Position des gesuchten Kleinplaneten herauszufinden, werden diese Schritte rückwärts ausgeführt: Wir kennen die Plattenkonstanten und können wie auch zuvor die x- und y-Koordinaten des Asteroiden messen. Dadurch erhalten wir die Standardkoordinaten ξ und η. Mithilfe der ersten beiden Formeln können wir dann schlussendlich die Himmelskoordinaten berechnen. Dazu ist es sinnvoll, die Formeln folgendermaßen aufzulösen:

$$\tan(\alpha - A) = \frac{\xi}{\cos D - \eta \sin D}$$

$$\tan \delta = \frac{(\eta \cos D + \sin D) \sin(\alpha - A)}{\xi}$$

Dies ist die grundlegende Theorie für die Positionsbestimmung von Himmelsobjekten. Durch diese Abfolge mathematischer Schritte ist es also möglich, allein über das Wissen der Himmelskoordinaten von mindestens 3 Referenzsternen und der Plattenmitte die Himmelskoordinaten jedes Objektes im Aufnahmebereich zu bestimmen. Wurde diese Theorie früher für die Astrometrie per Hand genutzt, verwendet man heutzutage den Computer und spezielle Software, welche diese Schritte vollautomatisch, genauer und vor allem viel schneller durchführen.

6.2 Die Software Astrometrica

Bei dem Programm Astrometrica handelt es sich um eine kommerzielle Software von Herbert Raab, erstellt „im Rahmen der Asteroidensuchprogramme der International Astronomical Search Collaboration und des Hauses der Astronomie“[32] .

Es bietet diverse Funktionen für die Bestimmung von Positionen beliebiger Himmelsobjekte. Dazu überprüft es eingelesene Aufnahmen und gleicht sie mit den offiziellen Daten des MPCOrb-Servers[33] ab, wobei für meine Arbeit die Daten des Minor Planet Centers verwendet werden. Außerdem nutze ich den Vizier Server des „Center for Astrophysics“ (kurz CfA) in Harvard, USA.

6.2.1 Voreinstellung

Bevor Astrometrica zur Positionsbestimmung verwendet werden kann, müssen einige Voreinstellungen getroffen werden. Dazu muss man auf „Edit Program Settings“ klicken, dargestellt durch einen blauen Schraubenschlüssel, links oben im Programmfenster.
Es erscheint ein Fenster mit 6 Unterkategorien. Folgende Einstellungen müssen getroffen werden, um die Software für Standort und Ausrüstung der Sternwarte am CFG anzupassen:

In „Observing Site“ werden Position der Beobachtung und Informationen zum Beobachter und zur Kontaktperson gespeichert. Außerdem werden Daten zum Teleskop gespeichert. Diese Daten werden später für das Übertragen der Beobachtungen an einen offiziellen Server verwendet (siehe Abb. 24).

[32] Anleitung_Astrometrica.pdf
[33] http://www.minorplanetcenter.net/iau/MPCORB.html

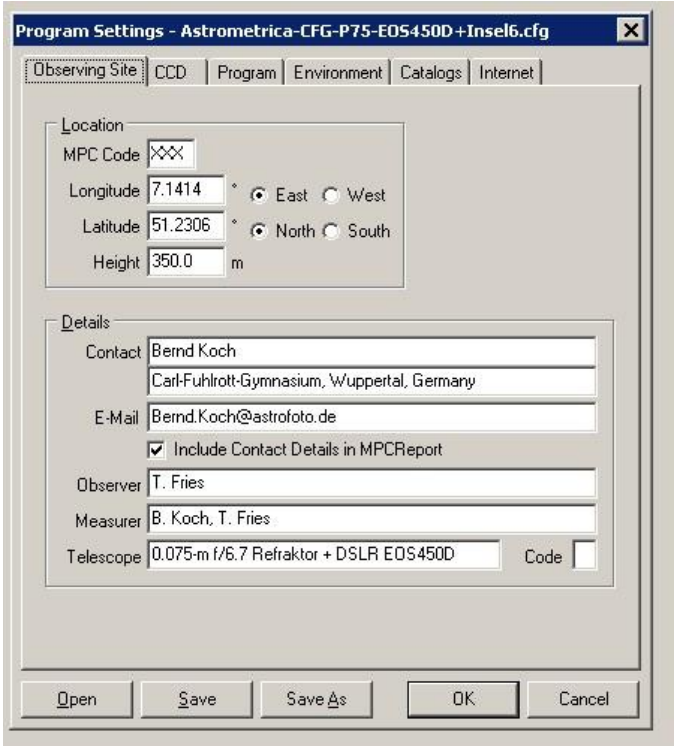


Abbildung 24: Einstellungen in "Observing Site"

„CCD“ enthält Informationen über die Bildaufnahmen. Dies betrifft die Brennweite des Teleskops, die Pixelgröße und den Zeitpunkt der Messung. Bei „Color Band“ wird „Visual (V)“ ausgewählt, da ich keinen Farbfilter für meine Aufnahmen verwendet habe. Außerdem wird hier eingestellt, wie Astrometrica mit der Aufnahmezeit umgehen soll. Für diese Arbeit nimmt Astrometrica die Zeit zu Beginn der Aufnahme. Da Astrometrica die Zeit automatisch an die UT-Zeitzone angleicht, also eine Stunde abzieht, und zur Zeit der Aufnahme keine Sommerzeit (UTC+2) war, wird bei Offset 0h eingetragen (siehe Abb. 25).

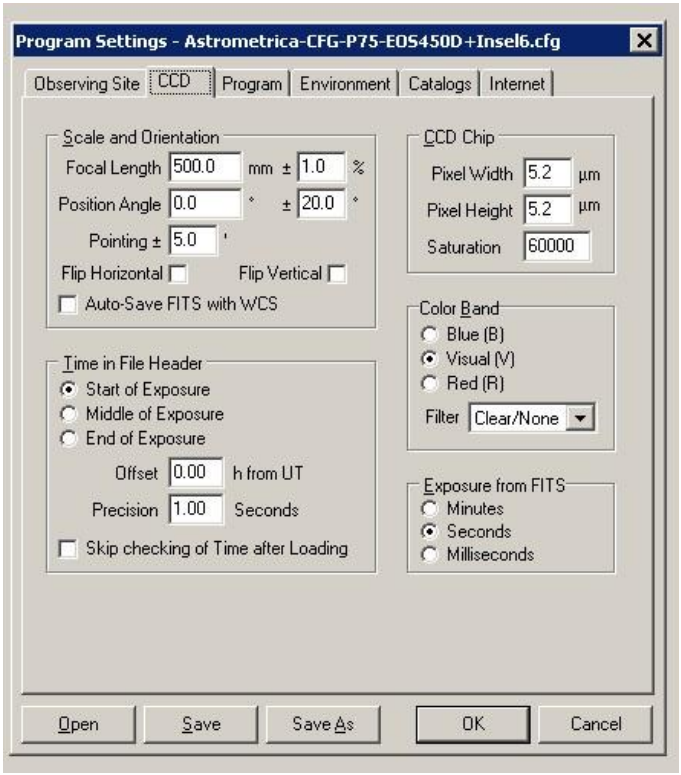


Abbildung 25: Einstellungen in "CCD"

In „Program“ werden einige Einstellungen gesammelt, wie die Bilder konvertiert werden. Unter anderem wird hier der verwendete Sternkatalog angegeben und in welchem Radius Referenzsterne gesucht werden sollen. Es handelt sich beim verwendeten Sternkatalog um den 80GB großen Katalog USNO-B 1.0[34], welcher als Standardkatalog für die meisten astronomischen Arbeiten gilt (siehe Abb. 26).

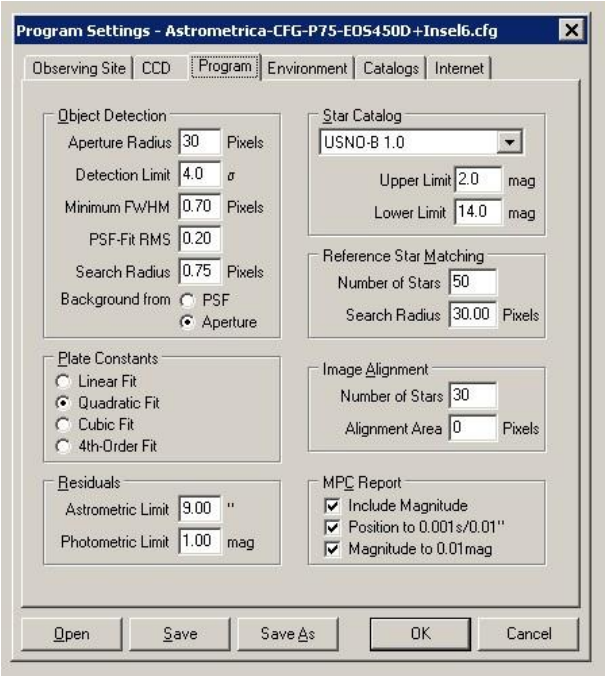


Abbildung 26: Einstellungen in "Program"

In „Environment“ wird festgelegt, wo die Programmausgabe gespeichert werden soll bzw. wo die MPCOrb-Datei zu finden ist. Außerdem können hier nach Bedarf die Farben der Software für die Darstellung der Objektpositionen geändert werden (siehe Abb. 27).

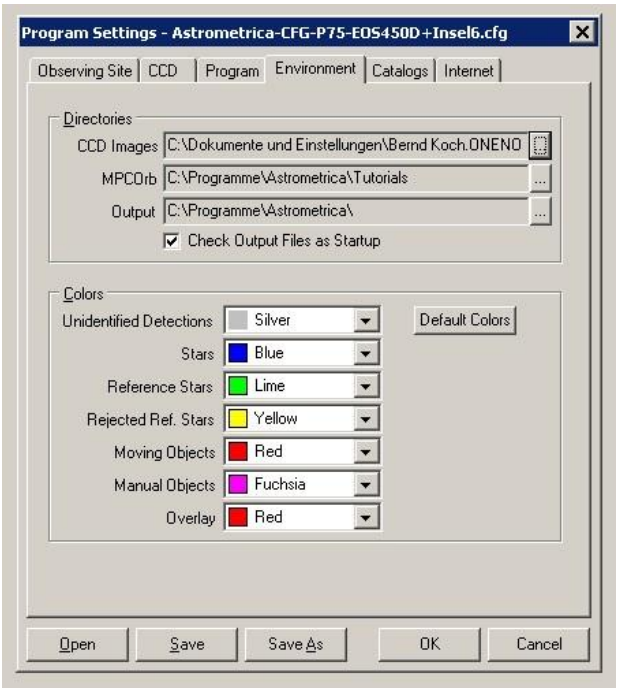


Abbildung 27: Einstellungen in "Environment"

[34] http://www.nofs.navy.mil/data/fchpix/

Hier kann der Ort eines lokalen Sternkatalogs festgelegt werden. Da ich für meine Arbeit eine Online-Version des USNO-B 1.0-Katalogs verwende, kann diese Option allerdings vernachlässigt werden (siehe Abb. 28).

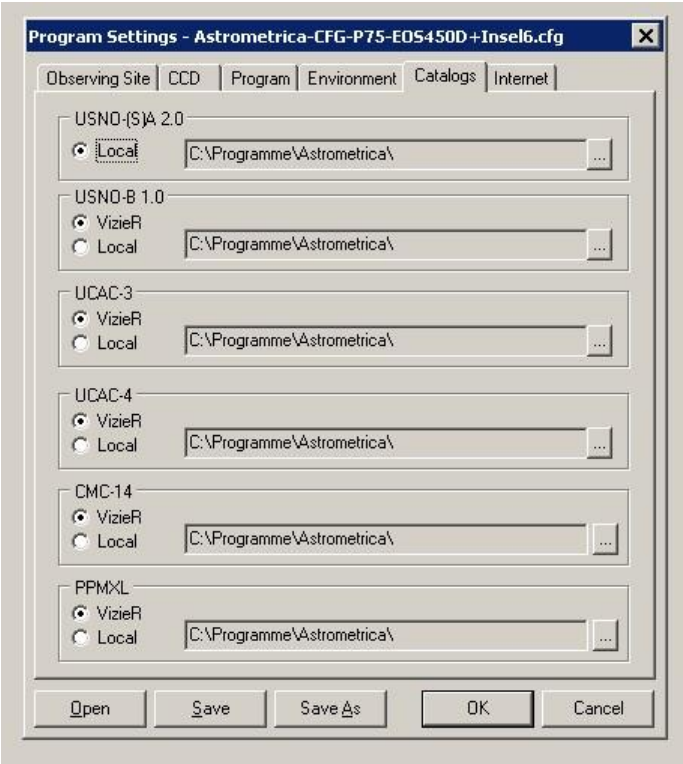


Abbildung 28: Einstellungen in "Catalogs"

Schließlich können noch Internet-Einstellungen getroffen werden. So lassen sich Daten zum Senden einer Email an einen offiziellen Server eintragen, aber auch, welcher MPCOrb-Server verwendet wird. Ich verwende in meiner Projektarbeit das Minor Planet Center (siehe Abb. 29).

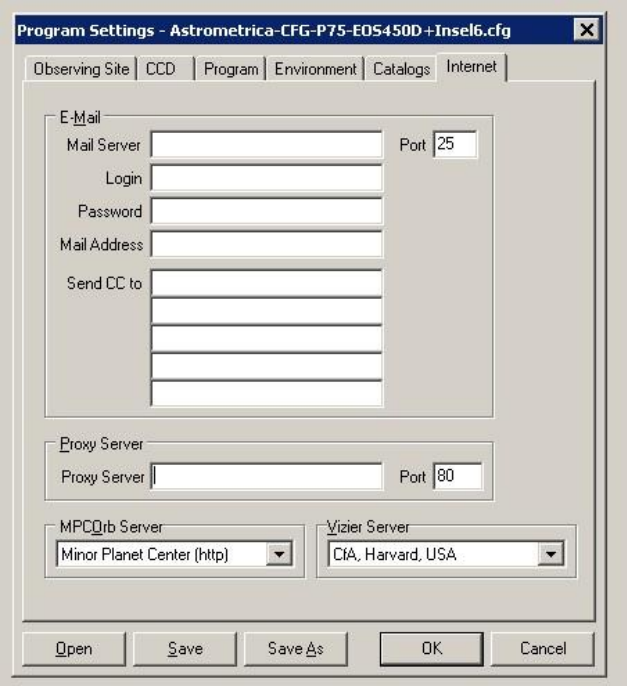


Abbildung 29: Einstellungen in "Internet"

Wurden alle Einstellungen gespeichert, sollte schließlich noch ein Update des MPCOrb-Katalogs durchgeführt werden bzw. muss dieser in der aktuellen Version heruntergeladen werden. Dies geschieht im Reiter „Internet“ in der Menüleiste. Führt man ein Update durch, kann man außerdem noch entscheiden, ob ein tägliches Update durchgeführt werden soll und ob die Daten zu bestimmten Objekten aktualisiert werden sollen. Ist der Download fertiggestellt (was einige Minuten dauern kann), können die Aufnahmen eingelesen werden.

6.2.2 Einlesen der Bilder

Die Aufnahmen der Himmelsobjekte können über „File – Load Images…“ oder per „Drag and Drop“ eingelesen werden. Danach fragt das Programm nach der Aufnahmezeit oder es entnimmt sie automatisch den Bildeigenschaften.

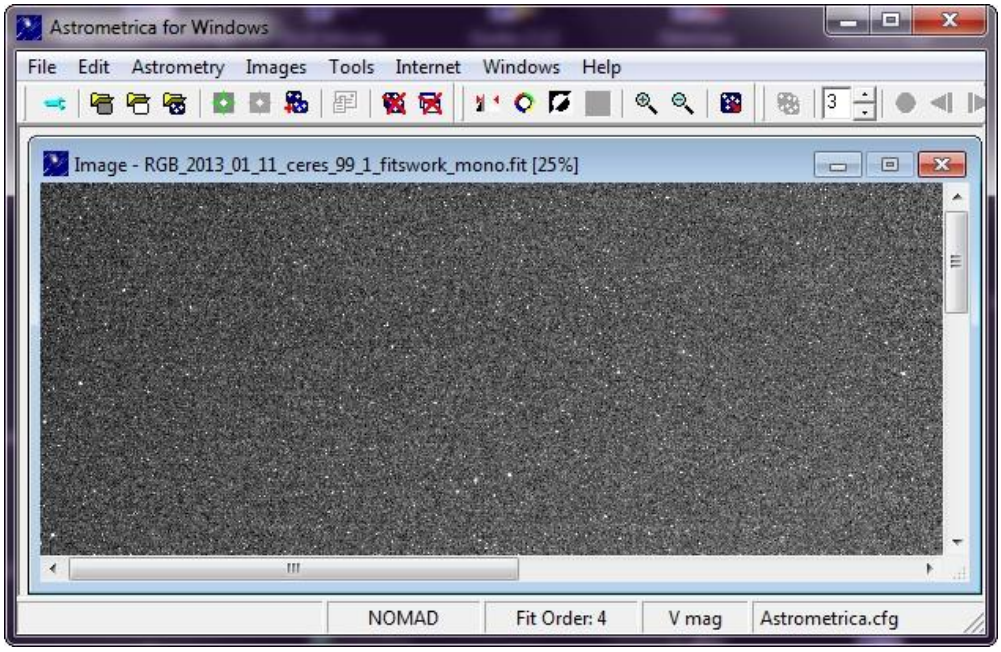


Abbildung 30: Erste Aufnahme von Ceres wurde in Astrometrica geladen

Um die Himmelsobjekte optisch erkennbarer darzustellen, lässt sich unter „Images – Background and Range“ eine kleine Helligkeitskorrektur durchführen. Dies hat allerdings keinen Einfluss auf das nachher berechnete Ergebnis von Astrometrica.

Durch einen Klick auf „Astrometric Data Reduction“ oder über die Tastenkombination Strg+A beginnt die eigentliche Auswertung. Dazu erscheint ein Fenster, in dem man das gesuchte Objekt angibt. Mithilfe der MPCOrb-Datei gibt das Programm die reale Position des Objekts an. Alternativ kann man auch eine eigene Position angeben.

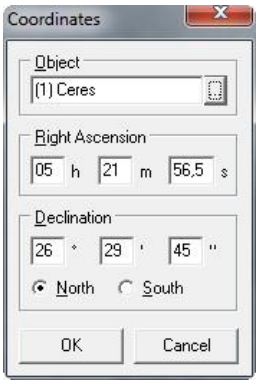


Abbildung 31: Auswahlfenster des gesuchten Objekts

Das Programm vergleicht nun die Aufnahme mit den offiziellen Daten des ausgewählten MPCOrb-Katalogs. Ist dieser Prozess fertiggestellt, erscheint eine kleine Tabelle mit Statistiken zum Ergebnis.

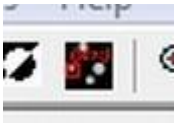
Data Reduction Results

Image	Detections	Ref. Stars	Ref./Ast.	Fit Order	dRA	dDe	Ref./Phot.	dmag	Zero Pt.
RGB_2013_01_11_ceres_99_1_f	6811	609	316	2	0.34"	0.31"	545	0.39mag	24.02mag

Abbildung 32: Ergebnisse der Aufnahmeuntersuchung von Ceres durch Astrometrica

Hier wird unter anderem angezeigt, wie viele Objekte erkannt wurden (Detections) und wie viele Referenz-Sterne gefunden wurden (Ref. Stars). Außerdem sieht man hier die Fehlerquote von Rektaszension (dRA) und Deklination (dDe). Der hier angegebene Wert von 0,34“ bzw. 0,31“ ist dabei sehr gut für die weitere Verwendung geeignet.

Ein Klick auf „Known Object Overlay“ zeigt an, an welcher Stelle Astrometrica das gesuchte Objekt erkannt hat. Dieses wird mit einem roten Kasten eingerahmt. Außerdem wird die Kennnummer des Objekts angezeigt. In diesem Fall sind dies 1 für Ceres und 4 für Vesta. Mit einem Klick auf diesen Kasten erhält man nähere Informationen zum Ergebnis.



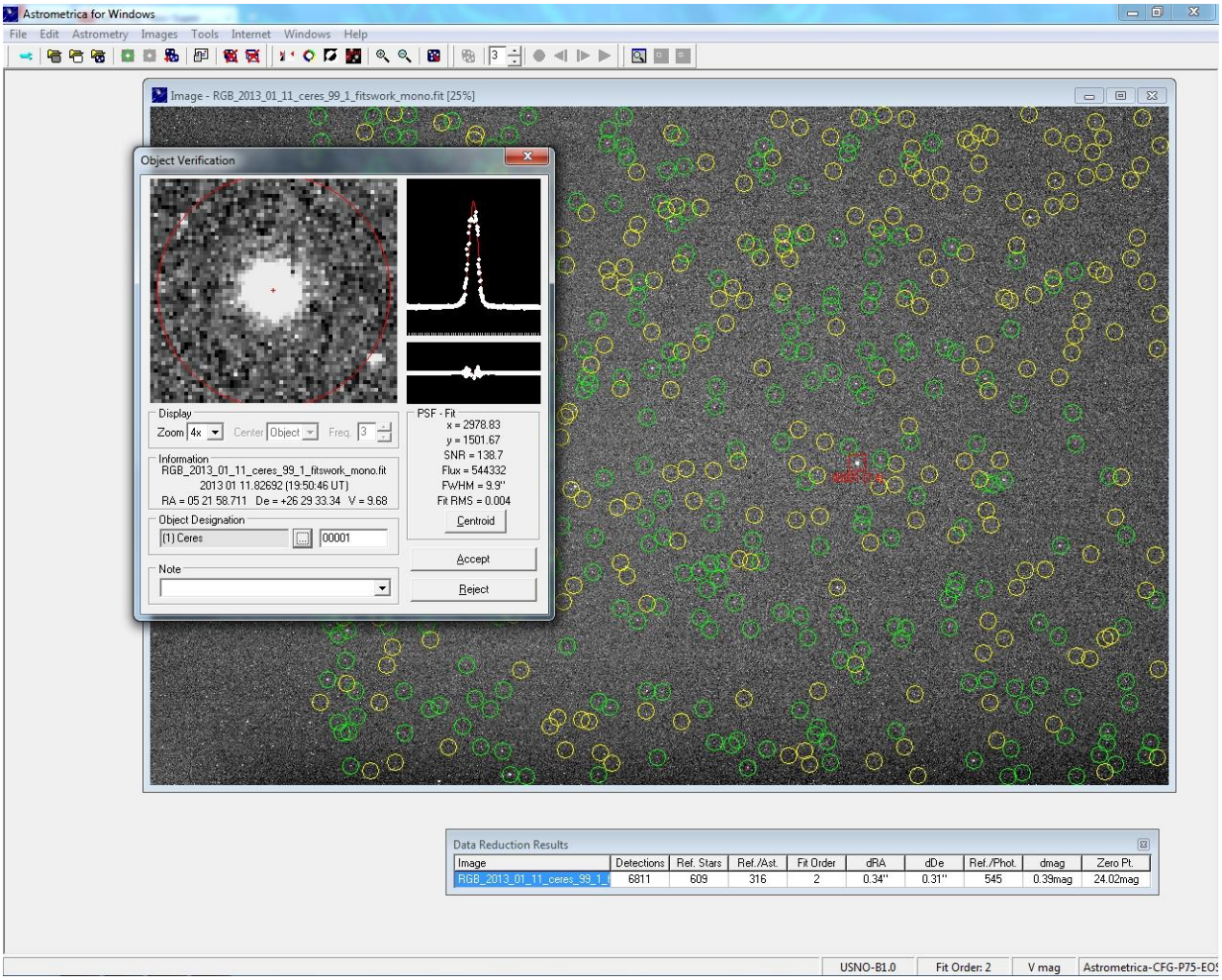


Abbildung 33: Informationen über das analysierte Objekt (in diesem Fall Ceres) von Astrometrica

6.2.3 Ergebnisse für die Aufnahmen vom 11.1.2013

Die wichtigsten Angaben für uns sind die Werte von Rektaszension und Deklination und der Aufnahmezeitpunkt. Diese werden zusammen mit der Helligkeit des Objekts für jede verwendete Aufnahme in eine Tabelle eingetragen. Ich habe hierbei für beide Objekte jeweils 5 unterschiedliche Positionen bestimmt.

Objekt	Tagesbruchteil; Uhrzeit [UT]	RA	DE	Helligkeit
Ceres	11.82692; 19:50:30 Uhr	05h 21m 58,711s	+26° 29‘ 33,34‘‘	7,4mag
	11.83035; 19:55:26 Uhr	05h 21m 58,572s	+26° 29‘ 33,59‘‘	7,4mag
	11.84935; 21:22:48 Uhr	05h 21m 55,842s	+26° 29‘ 43,43‘‘	7,4mag
	11.89800; 21:32:51 Uhr	05h 21m 55,507s	+26° 29‘ 43,27‘‘	7,4mag
	11.90441; 21:42:05 Uhr	05h 21m 55,218s	+26° 29‘ 44,80‘‘	7,4mag
Vesta	11.85359; 20:28:54 Uhr	04h 37m 32,995s	+18° 39‘ 27,43‘‘	7,1mag
	11.85874; 20:36:19 Uhr	04h 37m 32,834s	+18° 39‘ 28,21‘‘	7,1mag
	11.87569; 21:00:44 Uhr	04h 37m 32,189s	+18° 39‘ 31,59‘‘	7,1mag
	11.88059; 21:07:47 Uhr	04h 37m 32,121s	+18° 39‘ 31,52‘‘	7,1mag
	11.88384; 21:12:28 Uhr	04h 37m 32,036s	+18° 39‘ 31,84‘‘	7,1mag

7 Bahnbestimmung

Nun, da einige Positionen der Objekte bekannt sind, kann aus diesen eine Bahn berechnet werden. Leider war es aufgrund der Wetterverhältnisse nicht möglich, an mehr als einem Tag Aufnahmen machen zu können, weshalb die nachher berechnete Bahn evtl. stark von der tatsächlichen Bahn abweichen kann.

Um die Bahn eines Kleinplaneten im Sonnensystem bestimmen zu können, muss man wissen, dass diese mithilfe von 6 Konstanten beschrieben wird, den sogenannten Bahnelementen. Diese Elemente werde ich wie auch schon die Positionsbestimmung anhand einer Grafik erläutern (siehe Abb. 34).

7.1 Theorie

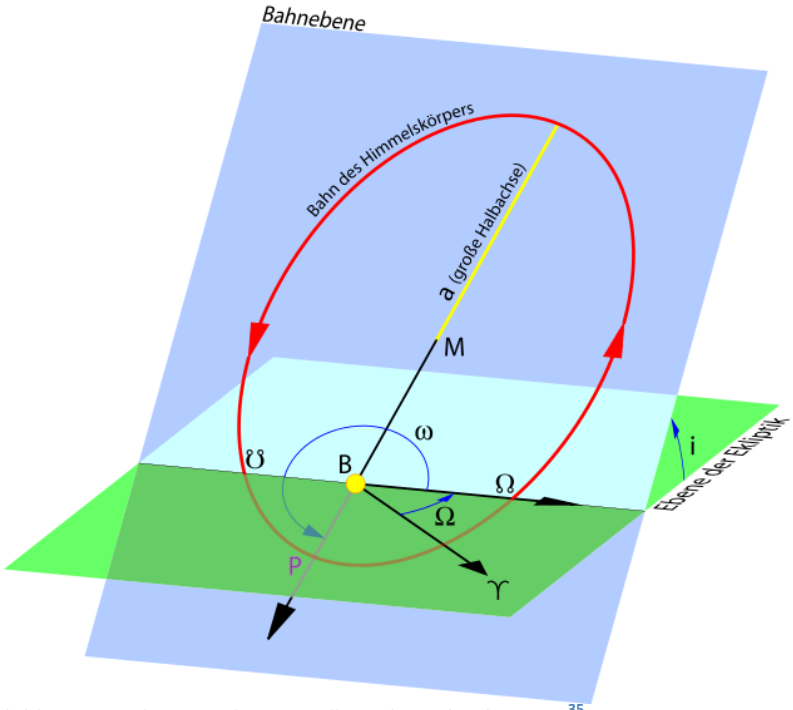


Abbildung 34: Schematische Darstellung der Bahnelemente[35]

[35] http://de.wikipedia.org/wiki/Bahnelement

Man sieht auf dieser Grafik die „Bahn des Himmelskörpers“, wie sie um die Sonne (mit „B“ beschriftet) verläuft. Die Abschrägung der Bahn wird durch die zwei sich schneidenden Flächen dargestellt, wobei die grüne Fläche der Ausgangspunkt für die Bestimmung der Bahnneigung ist. Die Schnittlinie der beiden Ebenen heißt Knotenlinie. Insgesamt nennt man eine solche Bahn, deren Objekt sich um ein größeres Objekt bewegt, Keplerbahn. Um diese genau beschreiben zu können, erfordert es die Angabe von 6 Bahnelementen.

Das erste Bahnelement ist die große Halbachse, welche den Buchstaben „a“ trägt. Da sich bei einer Planetenbahn praktisch immer um eine Ellipse handelt, hat sie einen unterschiedlichen Durchmesser, je nachdem wo man misst. Die große Halbachse beschreibt dabei den größten Durchmesser der Ellipse durch 2 geteilt, also der größte Abstand zwischen Umlaufbahn und Zentrum der Bahn (mit „M“ beschriftet).
Die eben angesprochene Abschrägung bezeichnet man „Inklination“ und trägt den Buchstaben „i“. Man berechnet sie in Grad.
Das mit „Ω“ bezeichnete Argument oder auch Länge des Knotens gibt den Winkelabstand zwischen dem Koordinatennullpunkt der Ausgangsebene und dem „aufsteigenden Knoten“ an. Letzterer ist der Teil der Knotenlinie, an dem die Objektbahn von Süden nach Norden durchstößt, in der Grafik also der Teil rechts von der Sonne. Dementsprechend bezeichnet man die andere Seite als „absteigenden Knoten“.
Ein weiteres Bahnelement ist das „Argument der Periapsis“. Dieses beschreibt den Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und der Periapsis, dem Punkt, an dem der Abstand von der Bahn zur Mitte der Bahn-Ellipse am kleinsten ist. Dieses Element trägt den Buchstaben „ω“. Der Perihelabstand, oder auch nur Perihel, ist im Gegensatz dazu der kleinste Abstand der Umlaufbahn zur Sonne.
Mit dem fünften Bahnelement „T“ kommen bestimmte Zeitpunkte hinzu, die „Periapsiszeit“. Demnach zeigen diese Zeitpunkte auf, wann sich das Objekt an der Periapsis der Umlaufbahn befindet.

7.1.1 Exzentrizität

Das 6. Bahnelement ist die Exzentrizität. Bei der für uns wichtigen mathematischen Exzentrizität unterscheidet man dabei zwischen der linearen Exzentrizität „e“ und der numerischen Exzentrizität „ε“. Erstere bestimmt dabei die Entfernung zwischen einem Brennpunkt der Umlaufbahn und dem Mittelpunkt M. Die beiden Brennpunkte lassen sich beispielsweise darstellen, indem man zwei Reißzwecken mit einem Faden verbindet und an diesem entlang zeichnet. Daraus folgt, dass sich der Abstand vom Mittelpunkt zum Rand der Ellipse an jedem Punkt ändert. Daher bezeichnet man den größten Abstand als „Große Halbachse“ und den kleinsten als „Kleine Halbachse“.
Die Ellipse lässt sich unter anderem als Menge aller Punkte P, für die die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 gleich ist, bezeichnen, wobei diese Punkte auf dem Rand der Ellipse liegen. Daraus ergibt sich folgende Formel: [36]

$$E = \{P \mid \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = konstant\}$$

[36] http://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#Ellipse_als_Punktmenge

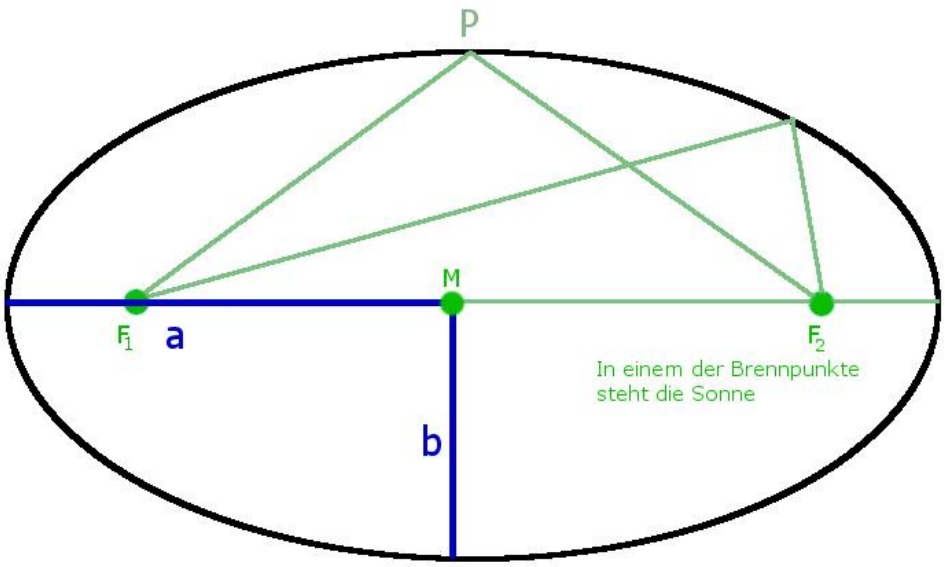


Abbildung 35: Schematische Darstellung der Brennpunkte (F_1 und F_2), der großen (a) und kleinen (b) Halbachsen und eines Punktes P auf dem Ellipsenrand einer Planetenbahn

In einer Formel ausgedrückt wird die lineare Exzentrizität für eine Ellipse mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ beschrieben. Dabei steht a für die Länge der großen Halbachse, während b für die Länge der kleinen Halbachse steht. Somit würde die lineare Exzentrizität bei einem perfekten Kreis 0 betragen, da a und b gleich groß wären.[37]

Bei der numerischen Exzentrizität wird nun die lineare Exzentrizität durch den Wert der großen Halbachse geteilt. Insgesamt erhält man für die numerische Exzentrizität bei Ellipsen also die Formel: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.
Da allerdings in der Regel mit der numerischen Exzentrizität gerechnet wird, bezeichnet man diese ebenfalls mit dem Buchstaben „e“ statt dem griechischen „ε“. Dies gilt auch für die Bahnbestimmung astronomischer Objekte.

7.1.2 Die Keplerschen Gesetze

Ebenfalls von Bedeutung für die Bahnbestimmung sind die drei nach Johannes Kepler benannten „Keplerschen Gesetze“. Sie beschreiben bestimmte Gesetzmäßigkeiten der um die Sonne kreisenden Planeten und werden zur Bestimmung ihrer Bahn verwendet.
Das erste Gesetz besagt, dass die Planeten eine elliptische Bahn haben, wobei in einem der beiden Brennpunkte die Sonne steht. Somit würde die Planetenbahn bei einer Exzentrizität von 0, also einer kreisrunden Form, immer denselben Abstand zur Sonne haben.
Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist die Fläche zwischen der Sonne und zwei Standorten des Planeten immer gleich, solange der Zeitabstand der beiden Standorte gleich ist.
Das dritte und letzte Gesetz lässt sich mit der Formel $T^2 = a^3$ beschreiben. Das bedeutet, dass das Quadrat der Umlaufzeit des Objekts gleich der dritten Potenz der großen Halbachse ist. Dabei wird die Umlaufzeit in Jahren und die große Halbachse in astronomischen Einheiten angegeben. Man kann also mithilfe dieses Gesetzes allein durch die Kenntnis eines der beiden Bahnelemente das andere berechnen. Gleichzeitig enthält das dritte Keplersche Gesetz aber auch das Verhältnis von Umlaufzeit und großer Halbachse bei zwei Objekten, die sich um dasselbe Zentrum bewegen:

[37] Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Exzentrizität_(Mathematik)

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Zur Kontrolle lassen sich beispielsweise die Werte für Erde und Mars einsetzen. Da die Erde als Maßstab für Jahre und astronomische Einheiten verwendet wird, beträgt deren Wert jeweils 1. Die Umlaufzeit des Mars beträgt etwa 1,882 Jahre, die große Halbachse beträgt 1,524 AE. Eingesetzt ergibt sich genau der jeweils andere Wert.

Da sich Kleinplaneten wie große Planeten verhalten, gelten diese Gesetze auch für Ceres und Vesta. So können einige Bahnelemente über diese drei Gesetze bestimmt werden. Dies geschieht aber wie auch bei der Positionsbestimmung nicht von Hand sondern mithilfe des Computers.

7.2 Die Software Find_Orbit

Die Durchführung der Bahnbestimmung und anschließend auch der Berechnung der Ephemeride erfolgt über die Software Find_Orbit[38]. Allerdings arbeitet dieses Programm nicht wie Astrometrica mit Bildern, sondern mit vorher in einer Textdatei eingetragenen Daten. Diese Daten können wir dem ausgegebenen Ergebnis von Astrometrica entnehmen. Es handelt sich dabei um die zuvor in eine Tabelle eingetragenen Werte für Aufnahmezeitpunkt, Rektaszension und Deklination und Helligkeit.
Um Find_Orbit diese Werte nun mitteilen zu können, muss zuerst die Datei „example“ kopiert werden, in welche wir anschließend unsere Werte mit den vorgeschriebenen ersetzen.

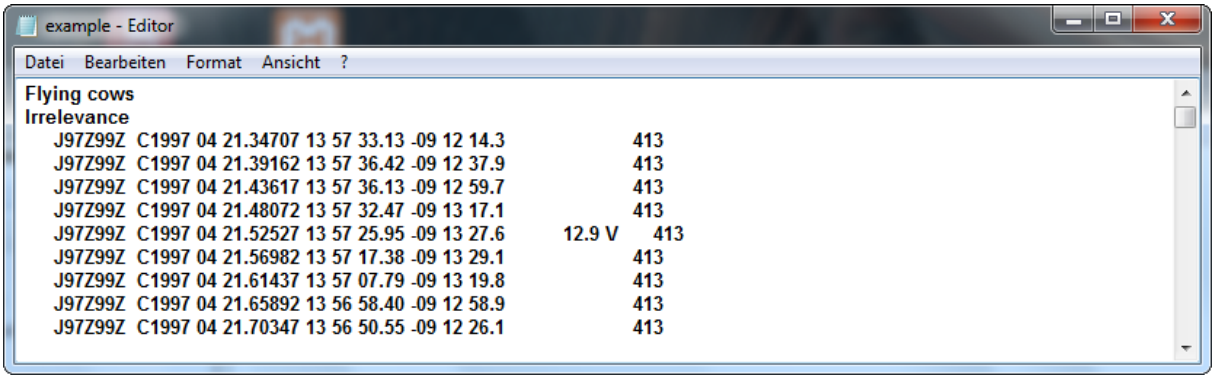


Abbildung 36: Beispiel einer Messdatei für Find_Orbit (dem Programm als "example" beigelegt)

Dazu muss bis auf eine Zeile der gesamte Inhalt gelöscht werden. Die nicht gelöschte Zeile nehme ich als Orientierungspunkt, wie ich die Daten von Ceres und Vesta einzutragen habe. Wichtig ist, dass beide Objekte in separate Dateien eingetragen werden müssen. Außerdem dürfen die Leerzeichen zwischen den Angaben nicht mit der Tabulatortaste gemacht werden. Am Ende sehen die Ergebnisse so aus (siehe Abb. 37 und Abb. 38):

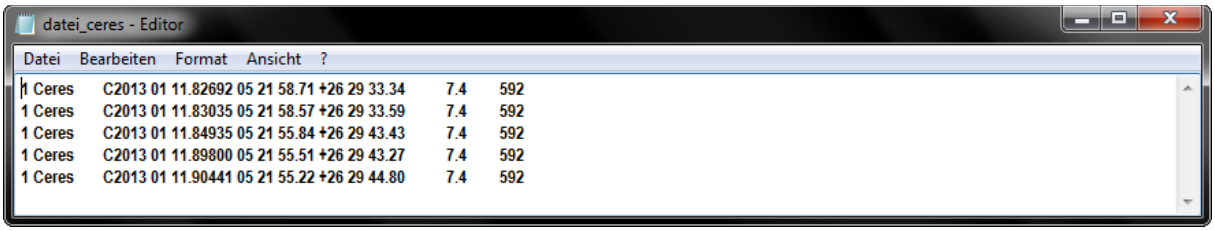


Abbildung 37: Find_Orbit-Messdatei von Ceres

[38] http://www.projectpluto.com/find_orb.htm

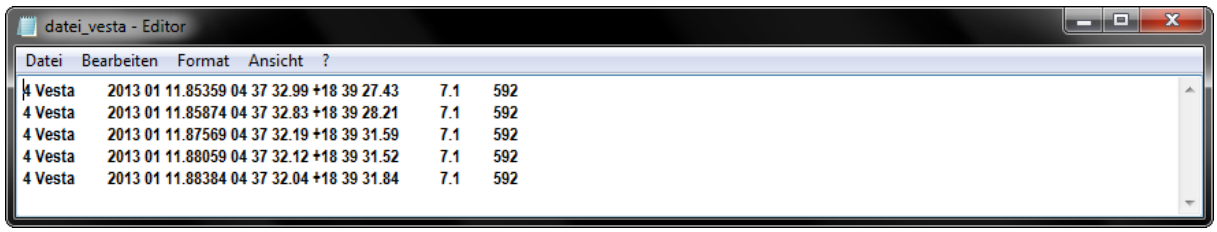


Abbildung 38: Find_Orbit-Messdatei von Vesta

Die Zahl vor dem Objektnamen gibt die Kennnummer an. Danach wird das Aufnahmedatum und die Uhrzeit in Tagesbruchteilen angegeben und im Anschluss die einzelnen Werte für Rektaszension und Deklination. Die 7.4 bzw. 7.1 steht für die Helligkeit des Objekts und die 592 ist die Kennnummer von Herrn Kochs früherer Beobachtungsstation in Solingen. Da der Standort nicht so weit vom tatsächlichen Aufnahmeort am Schulzentrum Süd entfernt liegt, wird es auch keine allzu großen Abweichungen bei der Bahnbestimmung geben.

Die fertigen Dateien können nun in das Programm geladen werden. Dazu muss zuerst die Anwendung „find_o32“ gestartet werden. Mit einem Klick auf „Open…“ oben links im Programmfenster wählt man eine der beiden Dateien aus. Das Programm berechnet nun automatisch aus den eingetragenen Werten die Bahnelemente. Diese werden im Abschnitt „Orbital Elements“ vermerkt.

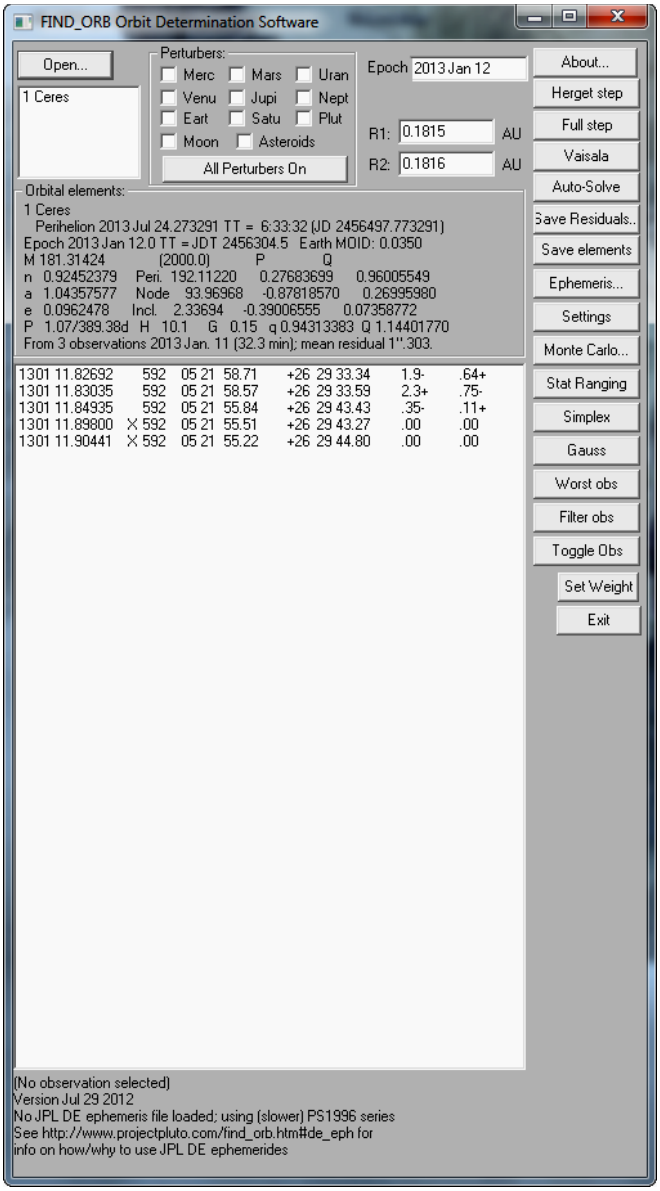


Abbildung 39: Programmfenster von Find_Orbit mit geladener Messdatei von Ceres

Bei den beiden unteren gemessenen Positionen ist rechts neben dem Beobachtungszeitpunkt jeweils ein „X“ zu sehen. Diese Werte wurden automatisch vom Programm ausgefiltert, da die Messungen fehlerhaft sind oder zu weit von einer möglichen Bahn abweichen. Wurden sie mit einem Klick angewählt, lassen sie sich durch “Toggle Obs“ dennoch in die Bahnbestimmung mit einbeziehen oder herausgefiltert werden.
Für eine weitere Verwendung der Positionen sind 2 von 5 herausgefilterten Werten sehr problematisch. Und auch die Genauigkeit der anderen Werte lassen sehr zu wünschen übrig: So tragen die Fehlerquoten der gemessenen Position (im Programmfenster rechts vom Wert der Deklination) insbesondere mit -1.9‘‘ und +2.3‘‘ für die Rektaszension recht hohe Werte. Die Operatoren bei den Werten geben an, ob sich die gemessene Position unterhalb (-) oder oberhalb (+) der Bahn befindet.
Für die Ursache dieser hohen Fehlerquote kann es mehrere Erklärungen geben, welche allerdings hauptsächlich auf Astrometrica zurückzuführen sind:

- Unterschiedliche Angaben für die Aufnahmezeit (Beginn der Aufnahme/Mitte der Aufnahme/Ende der Aufnahme)
- Probleme bei der Umrechnung in die UT-Zeit
- Probleme beim Auslesen der MPCOrb-Datei
- Falsch erkannte Referenzsterne

Hier ein direkter Vergleich mit den in der JPL-Datenbank angegebenen Werten für Ceres‘ Bahnelemente:

Bahnelement	**NASA-Wert**[39]	**Eigener Wert**
e	0,079	0,096
a	2,765 AE	1,044 AE
i	10,587°	2,337°
Ω	80,393°	93,970°
ω	72,590°	192,11°
T	2009-Feb-08,856	2013-Jul-24,273

Insgesamt ist es also nicht sinnvoll, mit den Werten für Ceres eine Ephemeridenrechnung durchzuführen. Leider ist es aus Zeitgründen im Rahmen dieser Arbeit auch nicht mehr möglich einen erneuten Versuch mit anderen Werten für Ceres zu starten.
Laut JPL-Datenbank sehen die Bahn und die Position von Ceres im Vergleich zu einigen anderen Planeten für den 11.1.2013 folgendermaßen aus (siehe Abb. 40):

[39] Vgl. http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=Ceres;orb=1;cov=0;log=0#orb

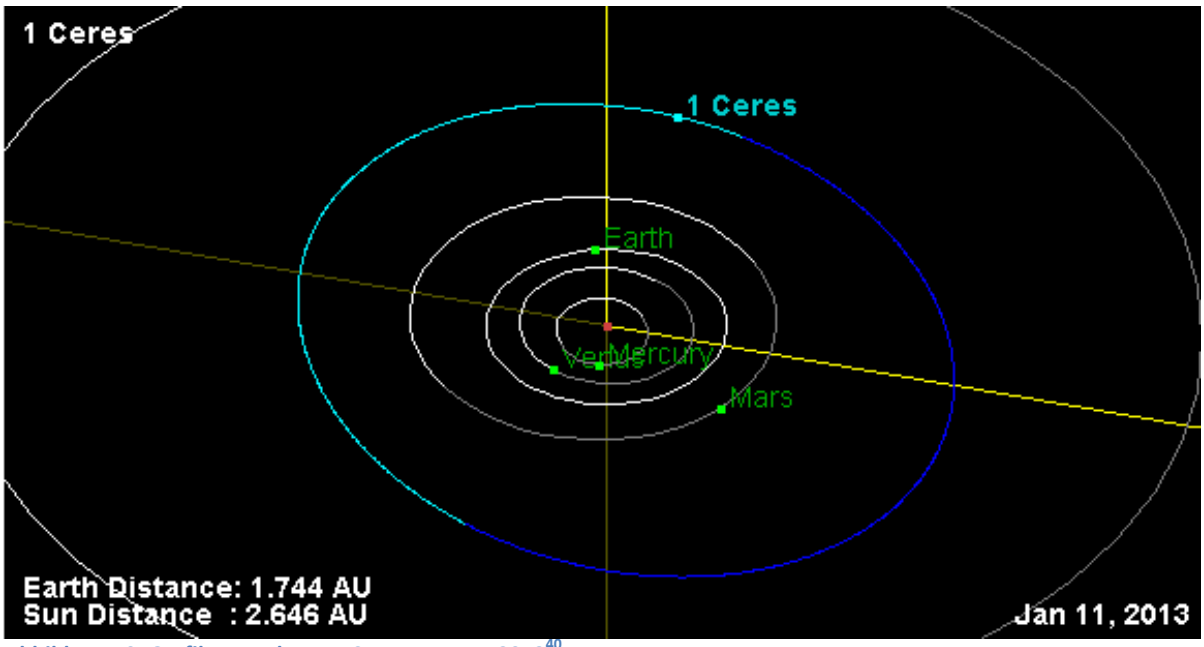


Abbildung 40: Grafik zur Bahn von Ceres am 11.1.2013[40]

Bei den Werten für Vesta sieht es schon anders aus (siehe Abb. 41):

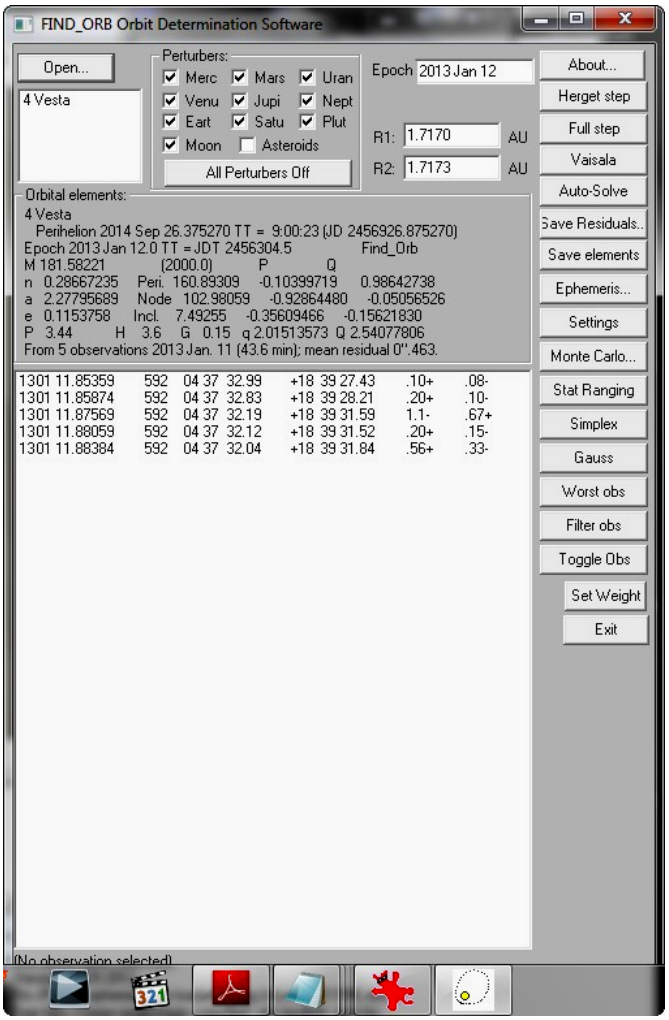


Abbildung 41: Bahnbestimmung von Vesta mit Find_Orbit

[40] http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=Ceres;orb=1;cov=0;log=0#orb

Hier wurden alle fünf Positionen in die Bahnberechnung einbezogen. Außerdem liegt die Fehlerquote bei den Werten bis auf die Rektaszension der dritten Position immer unter 1,0, was für eine spätere Ephemeridenrechnung optimal ist. Die folgende Tabelle zeigt wie auch zuvor bei Ceres einen Vergleich meiner berechneten Bahnelemente mit denen der NASA:

Werte für Vesta (Zeitepoche 2000.0)

Bahnelement	**NASA-Wert**[41]	**Eigener Wert**
e	0,089	0,115
a	2,362 AE	2,28 AE
i	7,134°	7,49°
Ω	103,910°	102,98°
ω	149,837°	160,89°
T	2011-Jan-31,244	2014-Sep-26,37

Die Bahn von Vesta sieht laut JPL-Datenbank folgendermaßen aus (siehe Abb. 42):

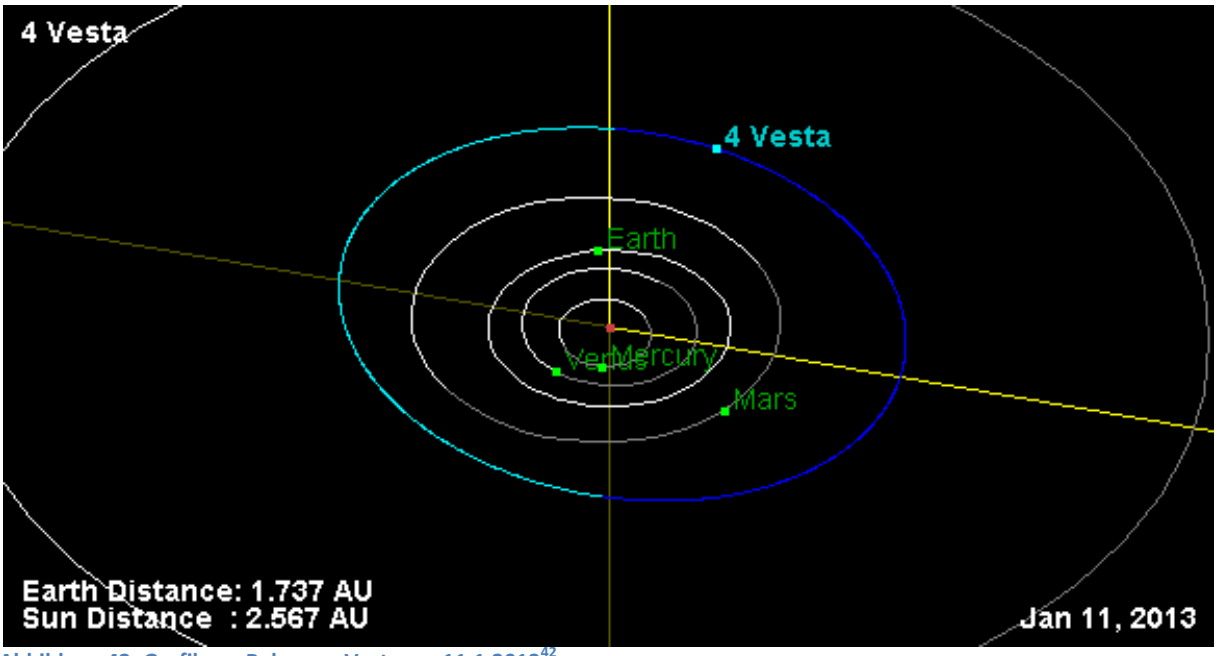


Abbildung 42: Grafik zur Bahn von Vesta am 11.1.2013[42]

7.3 Ephemeridenrechnung

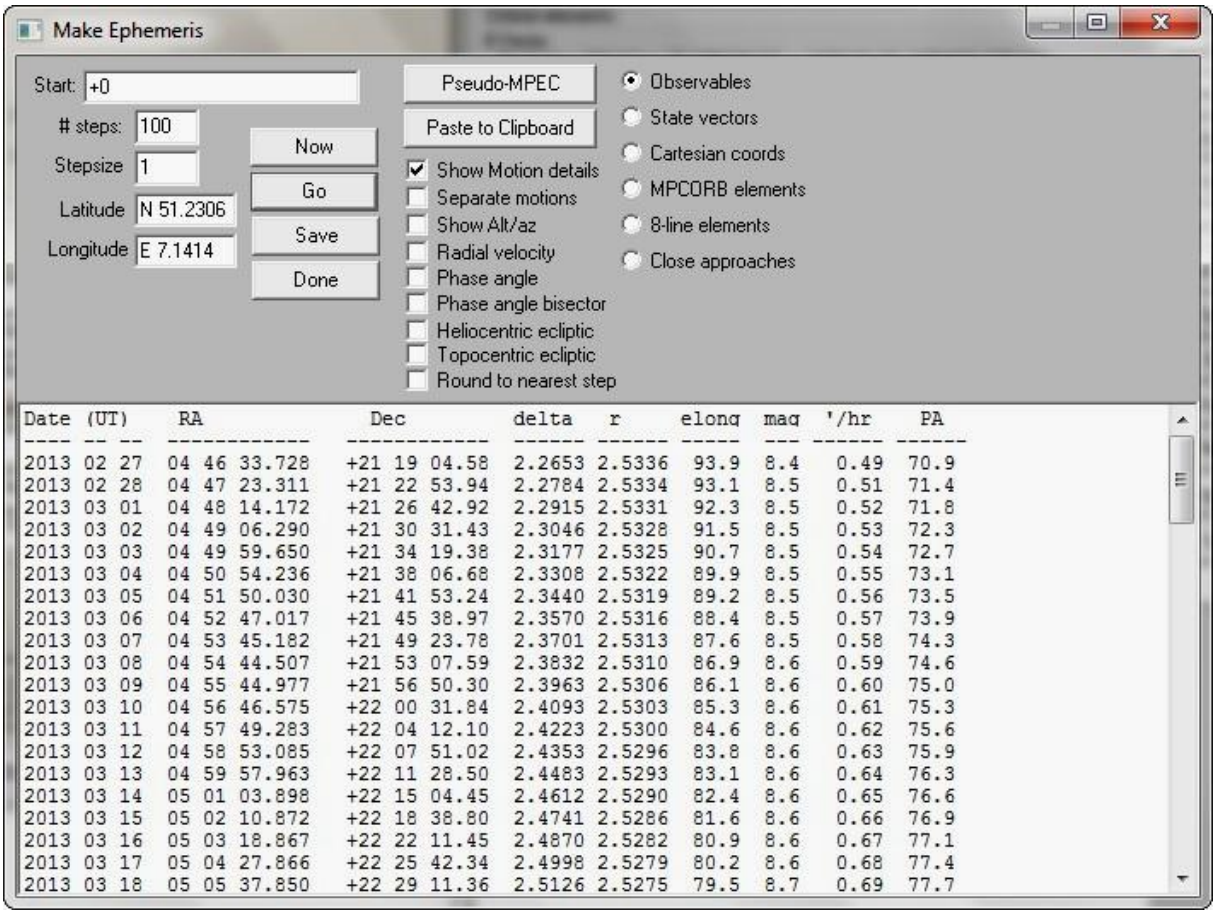
Der Begriff der Ephemeride stammt ursprünglich vom griechischen Adjektiv „ephēmeros“, was so viel bedeutet wie „einen Tag lang dauernd“.[43] Es handelt sich bei einer Ephemeride um eine Tabelle, in der bisherige Positionen astronomischer Objekte in konstanten zeitlichen Abständen gesammelt werden. Auf dieser Basis werden in der Ephemeridenrechnung möglichst genau zukünftige Positionen vorhergesagt. Berücksichtigt werden muss dabei aber das Gesetz der Gravitation. So bewegt sich das Objekt in der Regel nicht gleichmäßig um die Sonne, sondern wird durch andere Objekte mit hoher Masse von seiner Bahn abgelenkt. In erster Linie handelt es sich bei diesen Störfaktoren um die Planeten unseres Sonnensystems.

[41] Vgl. http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=vesta;orb=0;cov=0;log=0;cad=0#elem

[42] http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=vesta;orb=1;cov=0;log=0;cad=0#orb

[43] Wilhelm Gemoll: Griechisch-Deutsches Schul- und Handwörterbuch, 1965

Mit zuvor bestimmten Werten ist es nun möglich, die Ephemeridenrechnung durchzuführen. Das bedeutet, wir können mithilfe unserer Bahn eine zukünftige Position von Vesta bestimmen. Auch das ist mit „Find_Orbit“ möglich. Bevor die Ephemeride bestimmt wurde, habe ich aber noch diverse Störfaktoren in die Berechnung einbezogen. Diese lassen sich im Hauptmenü unter „Perturbers“ aktivieren (siehe Abb. 41).
Nun kann mit einem Klick auf „Ephemeris“ rechts im Programmfenster die Ephemeride aus den Bahnelementen berechnet werden. Es erscheint ein neues Fenster mit weiteren Optionen. Bei den Koordinaten wird der Beobachtungsstandort, also die Sternwarte des CFG, angegeben. Außerdem muss die rechte Auswahl auf „Observables“ eingestellt sein, damit das Programm unsere berechnete Bahn verwendet. Ein Klick auf „Show Motion Details“ zeigt neben der Position weitere Angaben zur Bewegung von Vesta an. Schließlich wird mit „Go“ die Ephemeridenrechnung gestartet.



Date (UT)	RA	Dec	delta	r	elong	mag	'/hr	PA
2013 02 27	04 46 33.728	+21 19 04.58	2.2653	2.5336	93.9	8.4	0.49	70.9
2013 02 28	04 47 23.311	+21 22 53.94	2.2784	2.5334	93.1	8.5	0.51	71.4
2013 03 01	04 48 14.172	+21 26 42.92	2.2915	2.5331	92.3	8.5	0.52	71.8
2013 03 02	04 49 06.290	+21 30 31.43	2.3046	2.5328	91.5	8.5	0.53	72.3
2013 03 03	04 49 59.650	+21 34 19.38	2.3177	2.5325	90.7	8.5	0.54	72.7
2013 03 04	04 50 54.236	+21 38 06.68	2.3308	2.5322	89.9	8.5	0.55	73.1
2013 03 05	04 51 50.030	+21 41 53.24	2.3440	2.5319	89.2	8.5	0.56	73.5
2013 03 06	04 52 47.017	+21 45 38.97	2.3570	2.5316	88.4	8.5	0.57	73.9
2013 03 07	04 53 45.182	+21 49 23.78	2.3701	2.5313	87.6	8.5	0.58	74.3
2013 03 08	04 54 44.507	+21 53 07.59	2.3832	2.5310	86.9	8.6	0.59	74.6
2013 03 09	04 55 44.977	+21 56 50.30	2.3963	2.5306	86.1	8.6	0.60	75.0
2013 03 10	04 56 46.575	+22 00 31.84	2.4093	2.5303	85.3	8.6	0.61	75.3
2013 03 11	04 57 49.283	+22 04 12.10	2.4223	2.5300	84.6	8.6	0.62	75.6
2013 03 12	04 58 53.085	+22 07 51.02	2.4353	2.5296	83.8	8.6	0.63	75.9
2013 03 13	04 59 57.963	+22 11 28.50	2.4483	2.5293	83.1	8.6	0.64	76.3
2013 03 14	05 01 03.898	+22 15 04.45	2.4612	2.5290	82.4	8.6	0.65	76.6
2013 03 15	05 02 10.872	+22 18 38.80	2.4741	2.5286	81.6	8.6	0.66	76.9
2013 03 16	05 03 18.867	+22 22 11.45	2.4870	2.5282	80.9	8.6	0.67	77.1
2013 03 17	05 04 27.866	+22 25 42.34	2.4998	2.5279	80.2	8.6	0.68	77.4
2013 03 18	05 05 37.850	+22 29 11.36	2.5126	2.5275	79.5	8.7	0.69	77.7

Abbildung 43: Berechnete Ephemeride von Vesta

Das Programm gibt nun mithilfe der vorher berechneten Bahn mögliche zukünftige Positionen von Vesta an. Eine vollständige Liste der zukünftigen Positionen befindet sich im Anhang. Sie wurde vom Programm über „Save“ als Textdatei gespeichert.
Für einen Vergleich mit der tatsächlichen Position verwende ich die von Find_Orbit ausgegebene Position für den 10.3.2013:

RA: 04h 56m 46,575s
DE: +22° 00‘ 31,84‘‘

Die tatsächliche Position von Vesta lässt sich wie auch die Bahnelemente in der „JPL Small-Body Database“[44] nachschauen. Dazu wählt man in der Linkleiste die Option „Ephemeris“ aus. Man gelangt so in ein Fenster, in dem man einige Optionen für die Ephemeridenrechnung mit den NASA-Werten einstellen kann.

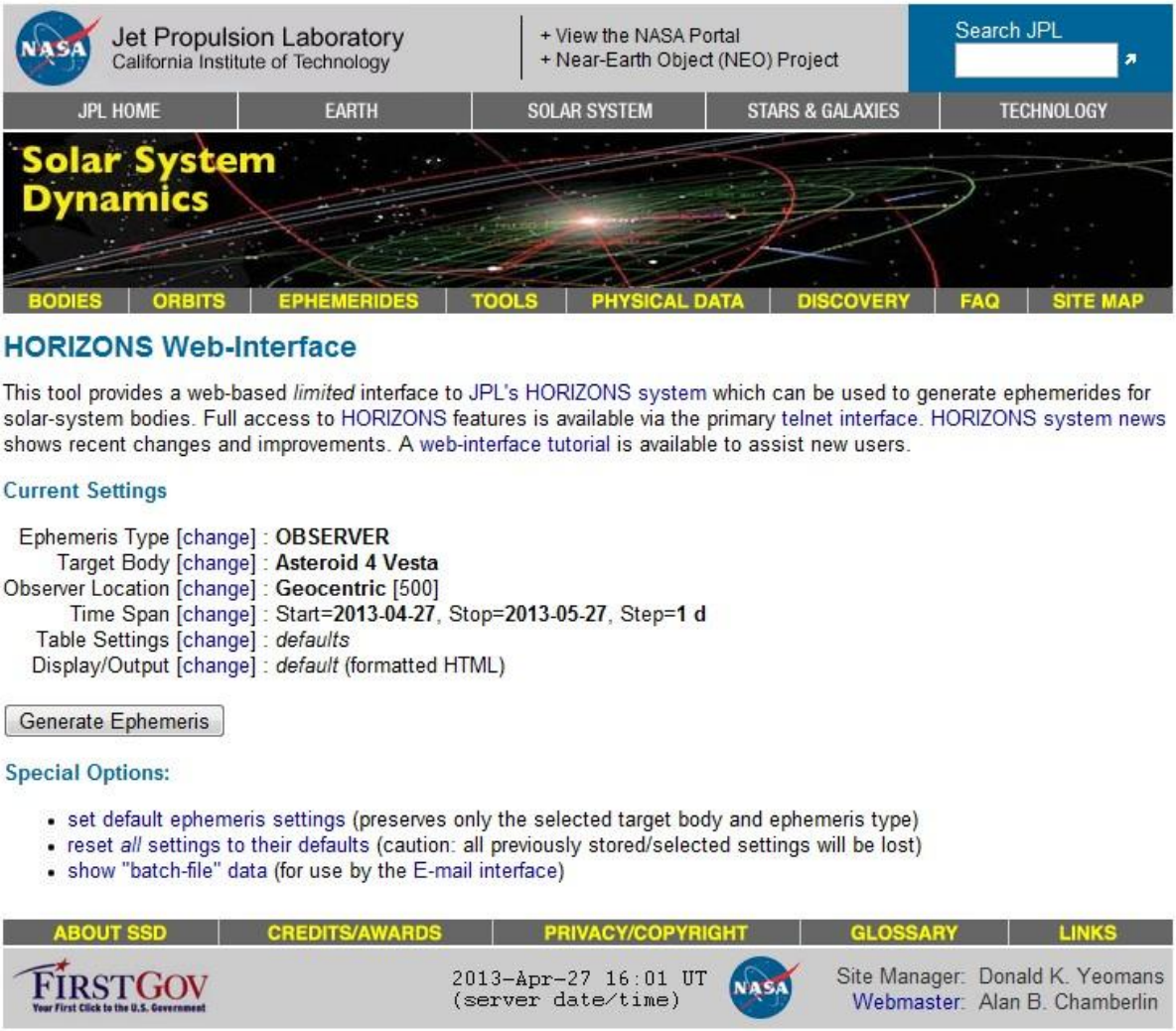


Abbildung 44: Voreinstellung für die Ephemeridenrechnung in der "JPL Small-Body Database"[45]

Als erstes verändern wir den Beobachtungsort. Dazu muss neben „Observer Location“ auf „Change“ geklickt werden. Es erscheint nun ein Menü, in dem wir unter „Specify Observer Coordinates“ die jeweiligen Daten eintragen:

Longitude: 7.1414 East
Latitude: 51.2306 North
Altitude: 350 meters
Body ID: 399

Ein anschließender Klick auf „Use Specified Coordinates“ bestätigt die Eingabe.
Nun muss noch der gesuchte Zeitraum bestimmt werden. Dazu wird „Time Span“ auf den 10.3.2013 eingestellt. Für die Startzeit ist also „2013-03-09“ und für die Endzeit „2013-03-11“ sinnvoll. Da die Schrittgröße auf Tage eingestellt ist, gibt uns die Datenbank nun genau 3

[44] http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi#top
[45] http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi?find_body=1&body_group=sb&sstr=4

Positionen von Vesta um genau 0:00 Uhr des jeweiligen Tages aus. Wurde die Zeit bestätigt, kann schließlich die Ephemeride generiert werden.
Es erscheint nun ein langer Datenbankeintrag, bei dem für uns nur diese Zeile wichtig ist (siehe Abb. 45):

```
*******************************************************************************************************************************
 Date__(UT)__HR:MN     R.A._(ICRF/J2000.0)_DEC  APmag  S-brt            delta      deldot    S-O-T /r    S-T-O      phi  PAB-LON  PAB-LAT
*******************************************************************************************************************************
$$SOE
 2013-Mar-09 00:00     04 55 30.79 +21 49 18.9   8.02   5.09 2.40845946148832  22.7167376  86.6729 /T  22.8605  22.8602  86.4913  -0.7786
 2013-Mar-10 00:00     04 56 31.71 +21 52 57.4   8.03   5.10 2.42142377527399  22.6867375  85.9140 /T  22.8499  22.8496  86.7268  -0.7463
 2013-Mar-11 00:00     04 57 33.75 +21 56 34.8   8.04   5.11 2.43436976407059  22.6520858  85.1596 /T  22.8354  22.8350  86.9643  -0.7143
$$EOE
*******************************************************************************************************************************
```

Abbildung 45: Ergebnis der Ephemeridenrechnung in der "JPL Small-Body Database"

Zum Vergleich sind hier jeweils Rektaszension und Deklination für den 10.3.2013 in einer Tabelle angegeben:

	Eigene Berechnung	JPL Datenbank
Rektaszension	04h 56m 46,575s	04h 56m 31,71s
Deklination	+22° 00‘ 31,84‘‘	+21° 52‘ 57,4‘‘

Für eine Ephemeridenrechnung, deren ursprüngliche Fotos in einem Zeitraum von weniger als einer Stunde aufgenommen wurden, ist dieses Ergebnis wirklich sehr genau. Somit war das Ergebnis der Bahnbestimmung exakt genug, um die Position von Vesta etwa 2 Monate im Voraus zu bestimmen.

8 Schlussgedanke

Wir haben nun mithilfe der eigenen Aufnahmen eine komplette Positionsbestimmung und anschließend auch eine Bahnbestimmung bis hin zur Ephemeridenrechnung durchgeführt. Auf diesem Weg lassen sich die Bahn und zukünftige Positionen jedes anderen Himmelsobjektes bestimmen. Dabei ist der Einsatz von Computersoftware eine sehr willkommene Hilfe, welche den gesamten Prozess nicht unwesentlich verkürzt.
Für genauere Ergebnisse wären weitere Aufnahmen notwendig gewesen. Ursprünglich war es im Rahmen dieser Projektarbeit geplant, an drei verschiedenen Nächten Aufnahmen von Ceres und Vesta zu machen, jedoch bot das schlechte Wetter kaum Möglichkeiten dazu. Dennoch ist das abschließende Ergebnis für Vesta wirklich zufriedenstellend, auch wenn das eigentliche Ziel der Arbeit, die Ephemeridenrechnung für Vesta und Ceres durchführen zu können, nicht erreicht wurde. Weitere Aufnahmen hätten die hier Fehlerquote bei Ceres deutlich senken können.

9 Abschlusserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit selbstständig angefertigt habe und alle verwendeten Quellen als Quellenverweis deutlich gemacht wurden und/oder als Datei auf der beiliegenden CD gespeichert wurden. Alle Textstellen, welche wortwörtlich oder inhaltlich anderen Werken entsprechen, wurden mit einem Quellenverweis versehen.

Ich bin damit einverstanden / nicht einverstanden*, dass die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit in der Bibliothek der Schule zugänglich gemacht wird.

Ort, Datum, Unterschrift

*Nicht zutreffendes streichen